Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
29. Mai 2018

Analysis 2

Übungsblatt 6

Aufgabe 22: Eine total aber nicht stetig partiell differenzierbare Funktion

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ total differenzierbar ist, die partiellen Ableitungen dort aber nicht stetig sind.

Aufgabe 23: Der Gradient steht senkrecht auf den Niveauflächen

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in G$ und $f(x) = c$. Die Niveaufläche von f zum Wert c ist definiert durch

$$N_f(c) := \{y \in G \mid f(y) = c\}.$$

Sei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N_f(c)$ mit $\varepsilon > 0$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = x$. Zeigen Sie, dass

$$\langle \alpha'(0), \operatorname{grad} f(x)\rangle = 0,$$

also, dass der Gradient senkrecht auf der Niveaufläche steht.

Aufgabe 24: Laplace für radiale Funktionen und eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Sei $h \in C^2((0,\infty),\mathbb{R})$ und $r : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $r(x) = \|x\|$. Es ist

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\,, \quad f := h \circ r$$

also eine rotationssymmetrische Funktion.

Zeigen Sie, dass f zweimal stetig partiell differenzierbar ist und $\Delta f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch ist, genauer, dass $\Delta f = g \circ r$ für

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad g(r) = h''(r) + \frac{n-1}{r} h'(r)\,.$$

Zeigen Sie nun, dass die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad u(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}}{t^{\frac{n}{2}}}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, d.h.

$$\partial_t u = \Delta_x u$$

erfüllt, wobei $\Delta_x u := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u$.

Aufgabe 25: Kugelkoordinaten

Sei $X = (0,\infty) \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}^3$ und sei $f : X \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta) =: (x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)).$$

Machen Sie sich die geometrische Bedeutung von f klar, indem Sie das Bild der Menge $\{1\} \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi)$ unter f skizzieren und bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f.

Abgabe: Bis Dienstag 5.6. um 10.10 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.