Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
5. Juni 2018

Analysis 2

Übungsblatt 7

Aufgabe 26: Laplace in Polarkoordinaten

Sei $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) =: (x(r,\varphi), y(r,\varphi))$$

und $u \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$(\Delta u)\circ f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\,(u\circ f)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\,(u\circ f)}{\partial\,\varphi^2}.$$

Aufgabe 27: Differential einer Abbildung

Wir fassen die Menge $V := \{p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R}\}$ der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n als $n+1$-dimensionalen reellen Vektorraum auf. (z.B. bilden die Monome $p_j(x) = x^j$, $j = 0,\ldots,n$ eine Basis von V.) Geben Sie eine Norm auf V an. Sei

$$f : V \to \mathbb{R}\,, \quad p \mapsto f(p) := \int_0^1 p(x)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie, dass f total differenzierbar ist und bestimmen Sie das Differential $Df|_p$ für alle $p \in V$. (geben Sie also insbesondere an, wie die lineare Abbildung $Df|_p : V \to \mathbb{R}$, $h \mapsto Df|_p h$ wirkt.)

Sei nun $n = 2$ und $\Phi : V \to \mathbb{R}^3$, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto (a_0, a_1, a_2)$, der Basisisomorphismus bzgl. der oben genannten Basis aus Monomen. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $D(f\circ\Phi^{-1})|_a$ der Abbildung $f\circ\Phi^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für alle $a \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 28: Kurvenintegrale und Gradientenfelder

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v \in C(G,\mathbb{R}^n)$ ein stetiges Vektorfeld. Sei weiterhin $\gamma \in C^1([a,b],G)$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann definiert man das **Kurvenintegral** von v entlang γ durch

$$\int_\gamma v := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}\ \mathrm{d}t\,.$$

Zeigen Sie: Falls v ein Gradientenfeld ist, d.h. es existiert eine Funktion $f \in C^1(G,\mathbb{R})$ mit $v = \nabla f$, so gilt für alle $\gamma \in C^1([a,b],G)$

$$\int_\gamma v = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,.$$

Hinweis: Der Integrand im Kurvenintegral hat für Gradientenfelder die gleiche Form wie der Ausdruck in Aufgabe 23. Sie können ihn also als Ableitung einer Funktion schreiben und dann den Hauptsatz aus Analysis 1 anwenden.

Aufgabe 29: Produktregel

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto h(x) = f(x)v(x)$ sowie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto g(x) = v(x)\times w(x)$. Drücken Sie $Dh|_x y$ und $Dg|_x y$ jeweils durch Df, Dv und Dw aus.

Seien nun $f(x) = \|x\|^2$, $v(x) = x$ und $w(x) = (-x_2, x_1, x_3)$. Berechnen Sie explizit die Jacobi-Matrizen $Dh|_x$ und $Dg|_x$.

Aufgabe B2: Stetigkeit linearer Abbildungen

Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $A : V \to W$ zwischen normierten Räumen die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) A ist stetig bei $v = 0$.

(ii) A ist stetig.

(iii) A ist beschränkt.

Hinweis: Zeigen Sie (i)⇒(ii), (ii)⇒(iii) und (iii)⇒(i). Für (ii)⇒(iii) argumentieren Sie mit Kontraposition und Folgenstetigkeit. Die anderen beiden Implikationen sind sehr leicht einzusehen.

Bemerkung: Aufgabe B2 ist eine (einfache!) Bonusaufgabe und zählt nicht zum Gesamtpool der Aufgaben von dem 50% erreicht werden muss. Falls Sie die Aufgabe abgeben und sinnvoll bearbeitet haben, erhöht sie aber selbstverständlich die Gesamtzahl Ihrer erfolgreich bearbeiteten Aufgaben.

Abgabe: Bis Dienstag 12.6. um 10.10 Uhr im Briefkasten Ihres Tutors im 3. Stock des C-Baus.