

# LINEARE ALGEBRA 1

## Übungsblatt 4

### Aufgabe 13: Lineare Abbildungen auf $P_{\mathbb{R}}$ (16 Punkte)

Sei  $P_{\mathbb{R}}^{(r)}$  wieder der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq r$ . Gibt es eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_{\mathbb{R}}^{(2)}$ , die gleichzeitig die folgenden 3 Bedingungen erfüllt:

$$L(1, 2, 3) = x^2 - 1, \quad L(0, 2, 1) = 3x + 4, \quad L(-1, 0, -2) = x^2 + x + 1?$$

### Aufgabe 14: Bild und Kern (30 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen jeweils  $\text{Kern}(L_j)$ ,  $\text{Bild}(L_j)$ ,  $\dim(\text{Kern}(L_j))$  und  $\dim(\text{Bild}(L_j))$ . (Eine Fallunterscheidung kann nötig sein.)

a)  $L_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $x \mapsto a \times x$ , d.h. das Kreuzprodukt mit einem festen Vektor  $a \in \mathbb{R}^3$ .  
Zur Erinnerung:  $(a_1, a_2, a_3) \times (x_1, x_2, x_3) := (a_2x_3 - a_3x_2, a_3x_1 - a_1x_3, a_1x_2 - a_2x_1)$ .

b)  $L_2 : P_{\mathbb{R}}^{(3)} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \int_{-1}^1 p(x) dx$ .

c)  $L_3 : V \oplus V \rightarrow V$ ,  $(v, w) \mapsto v - w$ , wobei  $\dim(V) = n$  sei.

### Aufgabe 15: Drehmatrizen im $\mathbb{R}^3$ (24 Punkte)

Für  $i = 1, 2, 3$  sei  $X_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Drehung um die  $x_i$ -Achse um  $\pi/2$  entgegen dem Uhrzeigersinn (bei rechtshändiger Anordnung der Achsen) und  $X_i^{-1}$  die Drehung im Uhrzeigersinn. Bestimmen Sie die zugehörigen Matrizen bzgl. der kanonischen Basis für jedes  $X_i$  und  $X_i^{-1}$ . Bestimmen Sie durch geometrische Betrachtungen  $X_1^{-1}X_2X_1$  und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Matrixmultiplikation ausführen.

### Aufgabe 16: Projektionen (30 Punkte)

Sei  $V$  ein Vektorraum und  $P : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i)  $P$  ist idempotent, d.h.  $P \circ P = P$ .
- (ii) Die Einschränkung von  $P$  auf  $U := \text{Bild}(P)$  ist die Identität, d.h.  $P|_U = \text{Id}_U$ .
- (iii) Es existieren Unterräume  $U, W \subset V$ , so dass  $U + W = V$  und  $P(u + w) = u$  für alle  $u \in U$  und  $w \in W$ .

Ist eine dieser Eigenschaften (und damit alle) erfüllt, so heißt  $P$  eine Projektion.

*Tipp:* Zeigen Sie z.B. die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (i).

**Vokabeln:** lineare Abbildung = linear mapping, Homomorphismus = homomorphism, Bild (einer linearen Abbildung) = image oder range, Kern = kernel oder null space, isomorph = isomorphic [áíðomórífk], kanonisch = canonical, Ebene = plane, Gerade = (straight) line, Achse = axis, Drehung = rotation, Spiegelung = reflection, Projektion = projection, Vorzeichen = sign, Zeile = row, Spalte = column, Rang = rank, im Uhrzeigersinn = clockwise, entgegen dem Uhrzeigersinn = counterclockwise, cartesisches Koordinatensystem = Cartesian coordinate system, Ursprung (eines Koordinatensystems) = origin.

**Abgabe:** Bis 16:00 Uhr am Mittwoch den 16.05.2018 im Briefkasten Ihres Übungsleiters (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3).