Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
14. Mai 2018

Lineare Algebra 1

Übungsblatt 5

Aufgabe 17: Symmetrische Matrizen (25 Punkte)
Für $M = (M_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$ sei die *transponierte* Matrix $M^T \in M(n \times m, \mathbb{K})$ definiert durch

$$(M^T)_{ij} = M_{ji}$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$. Weiter sei $\mathcal{S}(n, \mathbb{K}) := \{S \in M(n, \mathbb{K}) : \; S^T = S\}$ die Menge der *symmetrischen* $n \times n$-Matrizen, und sei $\mathcal{A}(n, \mathbb{K}) := \{A \in M(n, \mathbb{K}) : \; A^T = -A\}$ die Menge aller *antisymmetrischen* $n \times n$-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass die Transposition $M \mapsto M^T$ eine lineare Abbildung $M(m \times n, \mathbb{K}) \to M(n \times m, \mathbb{K})$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $(XY)^T = Y^T X^T$ für alle $X \in M(l \times m, \mathbb{K})$ und $Y \in M(m \times n, \mathbb{K})$.

(c) Im folgenden habe $\mathbb{K}$ die Eigenschaft, dass $1 + 1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass für jede Matrix $M \in M(n, \mathbb{K})$ genau eine symmetrische Matrix $S \in \mathcal{S}(n, \mathbb{K})$ und genau eine antisymmetrische Matrix $A \in \mathcal{A}(n, \mathbb{K})$ existieren, so dass gilt

$$M = S + A.$$

(d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}(n, \mathbb{K})$ und $\mathcal{A}(n, \mathbb{K})$ Unterräume von $M(n, \mathbb{K})$ sind und bestimmen Sie (mit Beweis) ihre jeweiligen Dimensionen.
Erklären Sie anhand der Dimensionsformel für Unterräume, warum sich dabei $\dim \mathcal{S}(n, \mathbb{K}) + \dim \mathcal{A}(n, \mathbb{K}) = n^2$ ergibt.

Aufgabe 18: Die Lie-Algebra der $n \times n$-Matrizen (25 Punkte)

Wir betrachten den Vektorraum $M(n, \mathbb{K})$ der $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass dieser durch die Verknüpfung $[\cdot, \cdot] : M(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K}) \to M(n, \mathbb{K})$, $(A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA$ (genannt Lie-Klammer oder Kommutator) zu einer *Lie-Algebra* wird, d.h. für alle $A, B, C \in M(n, \mathbb{K})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

(i) $[\cdot, \cdot]$ ist bilinear, d.h. $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$ und $[A, \alpha B + \beta C] = \alpha[A, B] + \beta[A, C]$,

(ii) $[A, A] = 0$,

(iii) und es gilt die Jakobi-Identität $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 19: Basiswechsel (25 Punkte)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Wir betrachten die lineare Abbildung $P_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die $v = \alpha a + \beta b$ auf

$$P_{a,b} v = \alpha a$$

abbildet. Was ist die geometrische Bedeutung dieser Abbildung? Bestimmen Sie die Matrix zu $P_{a,b}$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (a, b)$ und bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$.

(b) Es seien die Basen $\mathcal{A} = \big((1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}), (1+2\mathrm{i}, -1)\big)$ und $\mathcal{B} = \big((2+2\mathrm{i}, 2-2\mathrm{i}), (1+\mathrm{i}, -2)\big)$ des Vektorraums $\mathbb{C}^2$ gegeben. Dabei sind $(1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i})$ etc. die Darstellungen der Basisvektoren bezüglich der kanonischen Basis. Berechnen Sie die zugehörige Transformationsmatrix $S = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2})$.

Aufgabe 20: Der Rang bei Komposition (25 Punkte)

Sei $A \in M(l \times m, \mathbb{K})$ und $B \in M(m \times n, \mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass dann

$$\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) - m \leq \operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}$$

gilt. Unter welcher Bedingung gilt jeweils Gleichheit?

Hinweis: Betrachten Sie die Matrizen als lineare Abbildungen und verwenden Sie die Dimensionsformel für $\tilde{A} := A|_{\mathrm{Bild}(B)}$.

Aufgabe 21: (freiwillig) Eschers Treppe (40 Bonuspunkte)

Zeichnen Sie Eschers unmögliche Treppe (Abb. 1) nach, wie in Abb. 2.

Vorbemerkung: Während Escher Zentralperspektive benutzt hat, benutzen wir die (einfachere) Parallelperspektive. Was ist das? Die Zentralperspektive ist die korrekte Art des Abbildens (wie beim Auge oder Foto): Wir benutzen ein Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung am Ort des Beobachters und dem Bild in der Ebene $x_1 = 1$. Ein Objekt (oder ein Punkt eines Objekts) am Ort $u = (u_1, u_2, u_3)$ mit $u_1 > 0$ wird abgebildet auf denjenigen Punkt in der Bildebene, der vom Beobachter aus gesehen in derselben Richtung liegt wie das Objekt, also $g_z(u) = u_1^{-1} u = (1, u_2/u_1, u_3/u_1)$; die relevanten Koordinaten im Bild sind $f_z(u) = (u_2/u_1, u_3/u_1) \in \mathbb{R}^2$. Bei der Parallelperspektive hingegen bildet man den Punkt u auf $g_p(u) = (1, u_2, u_3)$ ab; die relevanten Koordinaten sind $f_p(u) = (u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2$. Die Parallelperspektive ist immer dann näherungsweise korrekt (bis auf eine zentrische Streckung), wenn sich die u_1-Werte der abgebildeten Objekte nicht stark unterscheiden. Während die Abbilder paralleler Geraden in der Zentralperspektive "zusammenlaufen", sind sie in der Parallelperspektive parallel. Noch etwas: Ein *Polygonzug* ist eine Aneinanderreihung gerader Strecken, von denen jede am Endpunkt der vorigen beginnt (wie z.B. in Abb. 2).

Anleitung zur Aufgabe: Wir verfolgen nur die Außenkante der Stufen und fassen (wie das Geländer in Eschers Bild) je drei Stufen zu einem Element zusammen. Wir betrachten drei Einheitsvektoren $e_x, e_y, e_z \in \mathbb{R}^3$, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen; diese Vektoren repräsentieren die drei Achsen des Gebäudes in Abb. 1. Wir setzen $v_x = f_p(e_x), v_y = f_p(e_y), v_z = f_p(e_z)$. Kennen wir von einem Punkt u das Abbild $f_p(u)$, so finden wir $f_p(u + \lambda e_x) = f_p(u) + \lambda v_x$ und entsprechend für e_y, e_z.

Der Trick an der unmöglichen Treppe besteht darin, dass ein Polygonzug im $\mathbb{R}^3$, der eine Treppe entlang stets abwärts führt, unmöglich wieder am Ausgangspunkt ankommen kann, während sein

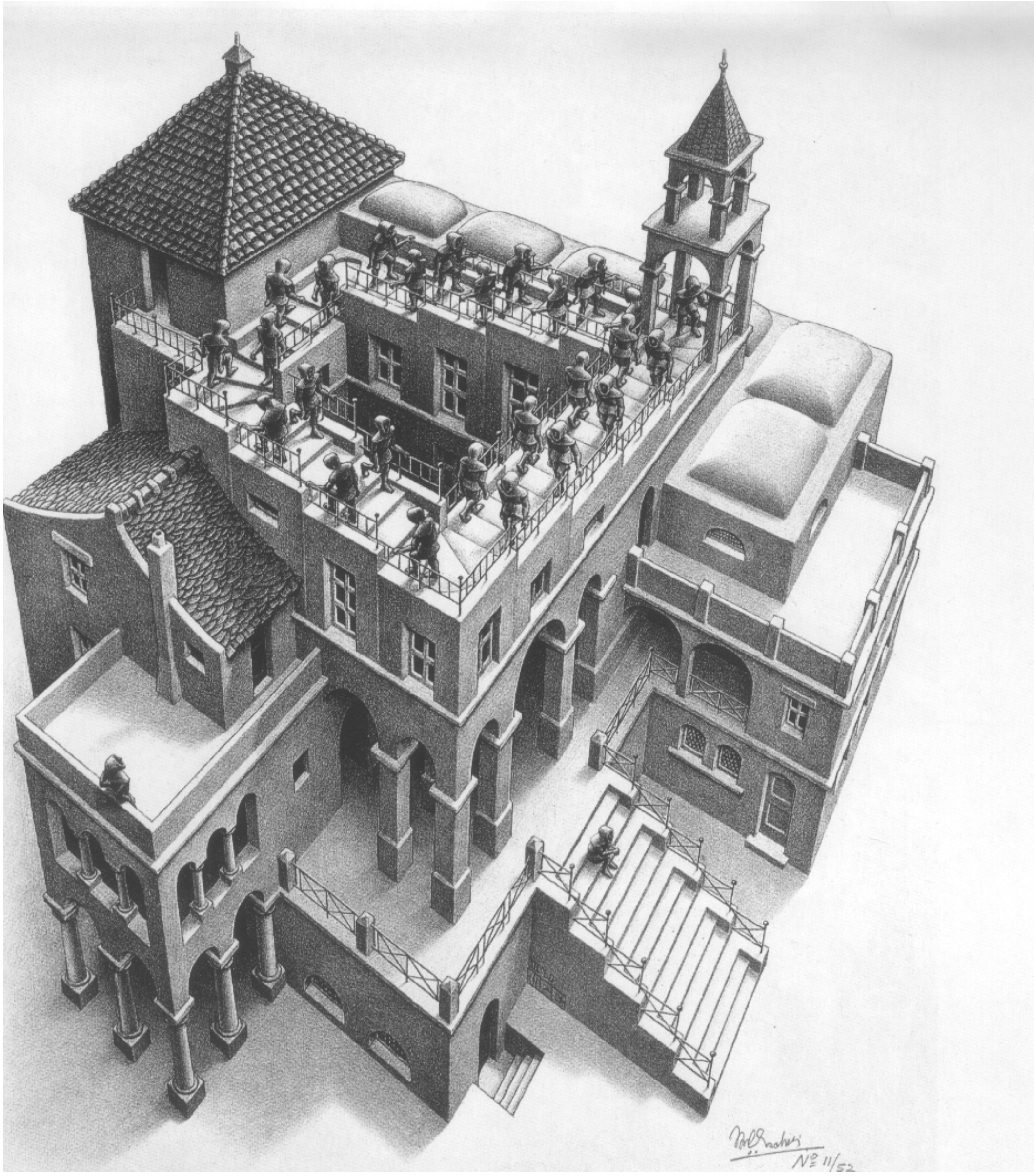

Abbildung 1: M. C. Escher (1898–1972), "Treppauf und treppab", Lithografie (1960).

Abbild sehr wohl am Abbild des Ausgangspunkts enden kann und daher in $\mathbb{R}^2$ einen geschlossenen Polygonzug bildet. Ist jede Stufe 10 cm hoch und 30 cm lang, dann ist jedes Stufenelement $\mu = 30$ cm hoch und $\lambda = 90$ cm lang. Der Weg im $\mathbb{R}^3$ entlang der Außenkante, an der dem Betrachter zugewandten Ecke beginnend, legt also zunächst die Strecke λ in x-Richtung zurück, dann $-\mu$ in z-Richtung, dann wieder λ in x-Richtung etc. (für die 6 Stufenelemente 6 mal λ in x-Richtung und 5 mal $-\mu$ in z-Richtung); dann λ in y-Richtung, $-\mu$ in z-Richtung etc. (6 Stufenelemente); dann $-\lambda$ in x-Richtung, $-\mu$ in z-Richtung (3 Stufenelemente); dann $-\lambda$ in y-Richtung, $-\mu$ in z-Richtung (4 Stufenelemente). Damit das Abbild dieses Weges geschlossen ist, muss in $\mathbb{R}^2$ gelten

$$6\lambda v_x - 5\mu v_z + 6\lambda v_y - 5\mu v_z - 3\lambda v_x - 2\mu v_z - 4\lambda v_y - 3\mu v_z = 0.$$

Wählen Sie Vektoren $v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}^2$ (zwei ausgesucht, der dritte aus der Gleichung bestimmt), die Eschers Bild einigermaßen nahekommen, und schreiben Sie ein Computer-Programm (in einer selbstgewählten Sprache, oder mit Hilfe einer Mathe-Software wie Matlab oder Maple), das das Abbild des Weges in $\mathbb{R}^2$ plottet. Bitte geben Sie neben Ihrem Plot einen Ausdruck Ihres Quellcodes ab.

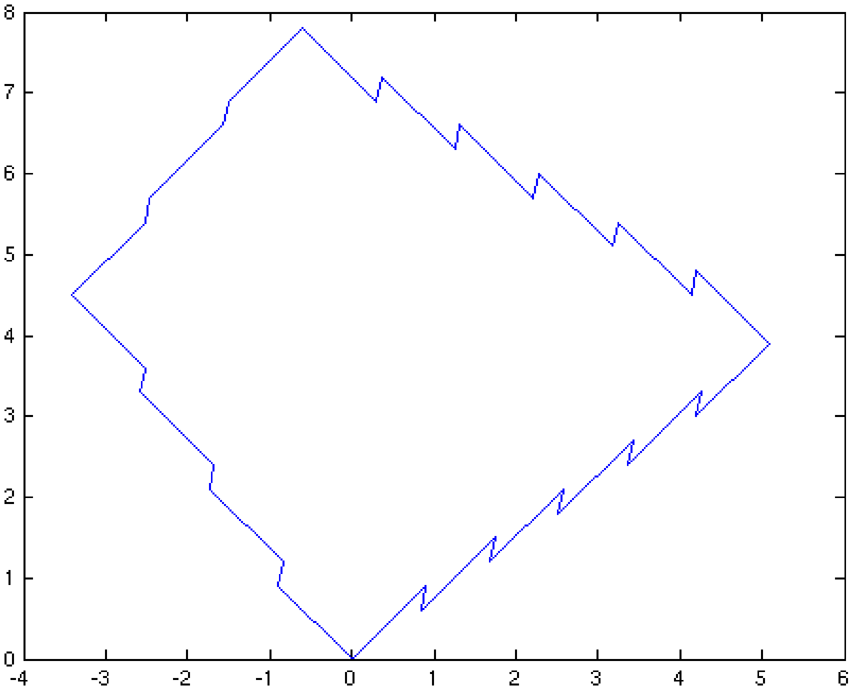

Abbildung 2: Außenkante der Treppe als Polygonzug.

Vokabeln: Punktprodukt = dot product, invertierbar oder regulär = invertible oder regular, unendlich = infinite [ínfinit], endlich = finite [fáinait], den Vektor v nach der Basis B entwickeln = to expand the vector v in the basis B, transponiert = transposed oder transpose, Einheitsmatrix = unit matrix oder identity matrix, Zähler (eines Bruchs) = numerator, Nenner = denominator, Kehrwert = reciprocal value oder inverse, ist gleich = equals, Gleichung = equation, Ungleichung = inequality, Satz = theorem, Beweis = proof, Definition = definition, Kreis = circle, Kreisscheibe = disk, Kugel(fläche) = sphere, Kugel(inneres) = ball.

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch den 30.05.2018 im Briefkasten Ihres Übungsleiters (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3).