

LINEARE ALGEBRA 1

Übungsblatt 7

Aufgabe 26: Zeilenstufenform (20 Punkte)

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix, indem Sie sie auf Zeilenstufenform bringen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27: Determinanten (20 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Welche sind folglich invertierbar?

a) Die der Drehmatrix $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$,

b) Die von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 4 & 0 & 11 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28: Permutationen (30 Punkte)

Eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ nennt man eine Permutation, die Menge S_n aller solcher Abbildungen heißt symmetrische Gruppe oder Permutationsgruppe.

- Zeigen Sie: Wenn $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ beide bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f : A \rightarrow C$ bijektiv, und die Umkehrabbildung ist $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Zeigen Sie, dass S_n mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe bildet und bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von S_n .
- Weiter definieren wir für jedes $\pi \in S_n$ einen Endomorphismus $L_\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$L_\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Welche Werte kann $\text{sgn}(\pi) := \det(L_\pi)$ annehmen? Welchen Wert hat $\text{sgn}(\sigma_{ij})$, wobei

$$\sigma_{ij}(k) = \begin{cases} k & \text{falls } k \notin \{i, j\} \\ j & \text{falls } k = i \\ i & \text{falls } k = j \end{cases}$$

die Vertauschung von i und j ist?

- Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_n$. Zeigen Sie, dass $\text{sgn}(\pi_2 \circ \pi_1) = \text{sgn}(\pi_2) \text{sgn}(\pi_1)$.

Aufgabe 29: Determinanten und Zeilenstufenform (30 Punkte)

- (a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n , dass die Determinante einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix durch das Produkt der Diagonaleinträge gegeben ist, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

- (b) Wie verändert sich der Wert einer Determinante bei elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen?

Berechnen Sie die folgende Determinante, indem Sie sie durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf diagonale Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Vokabeln: Mittelwert = mean (value), n Fakultät = n factorial, Determinante = determinant, nach der ersten Spalte entwickeln = to expand along the first column, alternierende Multilinearform = alternating multilinear form, Signum einer Permutation = sign of a permutation, Lösung = solution, rechter Winkel = right angle, Rechteck = rectangle, Dreieck = triangle, Rechenaufwand = computational cost, Näherung = approximation, Rauminhalt = volume, Flächeninhalt = area, Zylinder = cylinder, Kegel = cone, Kegelschnitt (d.h., Ellipse, Parabel oder Hyperbel) = conic section, Ellipse = ellipse, Parabel = parabola, Hyperbel = hyperbola.

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch den 13.6.2018 im Briefkasten Ihres Übungsleiters (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3).