Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
18. Juni 2018

Lineare Algebra 1

Übungsblatt 9

Aufgabe 33: Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen (25 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume in $\mathbb{R}^3$ der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Führen Sie die Diagonalisierung für die erlaubten Parameter durch, d.h. bestimmen Sie S (invertierbar) und D (diagonal) so, dass $A = SDS^{-1}$.

Aufgabe 34: Spur und Determinante als Funktion der Eigenwerte (10 Punkte)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V)$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und geometrischen Vielfachheiten $n_1, \dots, n_r$. Drücken Sie $\mathrm{Spur}(L)$ und $\det(L)$ durch die Eigenwerte von L aus.

Aufgabe 35: Fibonacci-Zahlen (25 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Hinweis: Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie A, um A^n zu berechnen.

Aufgabe 36: Verschiedenes zu Eigenwerten (40 Punkte)

Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ und λ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenraum $E_\lambda \subseteq \mathbb{C}^n$ der Dimension k. Zeigen Sie:

(a) λ ist ein Eigenwert von A^T mit geometrischer Vielfachheit k.

(b) Sei A regulär, dann ist $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} Eigenwert zu A^{-1}. Geben Sie den zugehörigen Eigenraum an.

(c) $\bar{\lambda}$ ist Eigenwert von $\bar{A}$. Geben Sie auch hier den zugehörigen Eigenraum an.

(d) Sei A nilpotent, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A^n = 0$. Zeigen Sie, dass daraus folgt $\lambda = 0$.

Aufgabe 37: Orientierung von Basen (freiwillig; 20 Zusatzpunkte)
Betrachten Sie einen Vektorraum V der Dimension n und die Menge $B(V)$ aller Basen von V. Zwei Elemente $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in B(V)$ mit $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ heißen gleichorientiert, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, wenn der durch $Lv_i = w_i$ festgelegte Endomorphismus $L : V \to V$ positive Determinante hat. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $B(V)$ festlegt. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch dem 4.7.2018 im Briefkasten Ihres Übungsleiters (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3).