Prof. Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
15.6.2018

Erste Übungsklausur zur Linearen Algebra 1

Informationen zur Klausur: Bitte melden Sie sich auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de/` zur ersten Teilklausur oder zum ersten Teiltest an. Beide finden statt am Montag, 25.6.2018 um 12:15 Uhr in Hörsaal N6 und dauern 60 Minuten. Die Klausur hat voraussichtlich 8 Aufgaben. Wenn Sie die Klausur als Prüfungsleistung schreiben, bearbeiten Sie alle 8 Aufgaben; wenn Sie sie als Test = Studienleistung schreiben, dann bearbeiten Sie nur die ersten 6 Aufgaben. Die Note auf die Prüfungsleistung beruht auf dem Mittelwert der ersten und zweiten Teilklausur.

Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei der Klausur/dem Test nicht erlaubt. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass bei der Klausur/dem Test Abschreiben und unerlaubte Kommunikation mit anderen Personen Verletzungen der akademischen Integrität darstellen und schwerwiegende Konsequenzen haben können. Der Stoff der ersten Teilklausur/des ersten Teiltests ist Kapitel 1–4 aus dem Skript und die Übungsblätter 1–7. Alle Fakten, die in der Vorlesung oder dem Repetitorium erwähnt oder in den Übungen bewiesen wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden. Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen. Streichen Sie falsche oder irreführende Teile Ihres Aufschriebs, die nicht bewertet werden sollen, deutlich durch.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Sie können die Aufgaben zu Hause lösen; sie werden nicht korrigiert. Diese Übungsklausur ist länger als die echte Klausur; ihre vorgesehene Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Die erreichbaren Punktzahlen addieren sich auf 100. Es ist vorgesehen, dass Sie keine Bücher, Notizen oder elektronische Hilfsmittel benutzen.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? (24 Punkte)

Kreuzen Sie $\boxed{\text{W}}$ an, wenn die Aussage wahr ist und $\boxed{\text{F}}$, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt 2 Punkte, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt -2 Punkte. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen keine Begründungen anzugeben.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Addition von Matrizen ist kommutativ.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Jeder Vektorraum hat eine endliche Basis.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Anzahl der Elemente eines $\mathbb{Z}_2$-Vektorraums ist stets entweder ∞ oder eine Zweierpotenz.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $(AB)^2 = A^2B^2$ für alle $n \times n$-Matrizen A, B.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig, wenn jede Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ die Null ergibt.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Ein lineares Gleichungssystem mit 4 Unbekannten, dessen Koeffizientenmatrix A Rang 3 hat, kann unendlich viele Lösungen haben.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Ist (A', b') das Ergebnis einer Folge von elementaren Zeilenumformungen von (A, b), so haben $Ax = b$ und $A'x = b'$ dieselbe Lösungsmenge.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Menge der reellen Polynome, in denen nur ungerade Exponenten auftreten, ist ein Unterraum des Vektorraums aller reellen Polynome.

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Matrizen $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ korrekt?

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(A + B) = \det A + \det B$

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(AB) = \det(BA)$

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(A^T) = \det(A)$

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(2A) = 2\det(A)$

Aufgabe 2: Inverse Matrix (8 Punkte)

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{bmatrix}$, wobei a, b, c Parameter sind.

Berechnen Sie A^{-1} nach dem Gauß-Jordan-Verfahren. Überprüfen Sie Ihre Antwort, indem Sie $A^{-1}A$ berechnen.

Aufgabe 3: Zeilenumformung (6 Punkte)

Für jede der angegebenen Matrizen: Kann man sie aus $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ durch eine *einzelne* elementare Zeilenumformung erhalten?

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja
☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein

Aufgabe 4: Determinante (6 Punkte)

Sei $R = \begin{bmatrix} a & u & w \\ 0 & b & v \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, wobei $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ und u, v, w reelle Zahlen sind. Sei $A = R^T R$.

Benutzen Sie Eigenschaften der Determinante, um $\det(A)$ durch a, b, c, u, v, w auszudrücken.

Aufgabe 5: Basiswechsel (6 Punkte)

Es seien $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diejenige lineare Abbildung, deren Matrixdarstellung bezüglich der kanonischen Basen $\mathcal{K}^2$ und $\mathcal{K}^3$ gegeben ist durch

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}^2}^{\mathcal{K}^3}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(L)$ von L bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Aufgabe 6: Matrix-Multiplikation (3 Punkte)

Finden Sie ein Beispiel einer 2×2-Matrix $A \neq 0$, so dass $A^2 = 0$.

Aufgabe 7: Gauß-Verfahren (6 Punkte)

Benutzen Sie elementare Zeilenumformungen nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren, um die gegebene Matrix in allgemeine Zeilenstufenform zu bringen. Welchen Rang hat die Matrix? Geben Sie jeweils im Kästchen an, welche Zeilenumformung Sie verwenden (z.B. $R_3 + 3R_2$ oder R_{14}). (Die Zahl der Schritte kann geringer sein als die der eingezeichneten Felder für Matrizen.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \xRightarrow{\boxed{}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Reguläre Matrix (3 Punkte)

Formulieren Sie die Definition von "regulär". (Es reicht dabei nicht, einen Begriff anzugeben, der synonym ist mit "regulär". Sie dürfen Symbole wie $\exists$ verwenden.) Eine Matrix $A \in M(n, \mathbb{K})$ heißt regulär, wenn folgendes gilt:

Aufgabe 9: Wahr oder falsch? (15 Punkte)

Wenn wahr, geben Sie eine Begründung; wenn falsch, geben Sie ein Gegenbeispiel.

a) Wenn U und V irgendwelche Unterräume von $\mathbb{R}^{10}$ sind mit $\dim U = 7$ und $\dim V = 3$, dann ist $U + V = \mathbb{R}^{10}$.

b) Wenn die Matrix A breiter als hoch ist ($m < n$), dann hat die Gleichung $Ax = 0$ eine Lösung $x \neq 0$.

c) Wenn die Einträge von $A \in M(n, \mathbb{R})$ und A^{-1} alle ganze Zahlen sind, dann liegen sowohl $\det A$ als auch $\det(A^{-1})$ in $\{+1, -1\}$.

d) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ für alle reellen 2×2-Matrizen A, B.

e) Wenn $A \in M(n, \mathbb{R})$ regulär ist und $B \in M(n, \mathbb{R})$ singulär, dann ist $A + B$ regulär.

Aufgabe 10: Beweis (10 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n$ und $U \subset V$ ein Unterraum mit $\dim U = n - 1$. Zeigen Sie:

$$\text{Ist } W \text{ ein Unterraum von } V, \text{ so ist } \dim(W \cap U) \geq \dim W - 1.$$

Aufgabe 11: Matrix-Darstellung eines Endomorphismus (7 Punkte)

Sei $P_{\mathbb{R}}^{(n)}$ der Vektorraum aller reellen Polynome $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ vom Grade $\leq n$. Sei L die lineare Abbildung von $P_{\mathbb{R}}^{(1)}$ nach $P_{\mathbb{R}}^{(2)}$ gegeben durch

$$Lp(x) = 3x^2 \frac{d}{dx} p(x) + (4x + 5)p(x).$$

Bestimmen Sie die 3×2-Matrix $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(L)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (1, x)$ von $P_{\mathbb{R}}^{(1)}$ und der Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ von $P_{\mathbb{R}}^{(2)}$.

Aufgabe 12: Lineare Abhängigkeit (6 Punkte)

a) Ist die folgende Menge linear abhängig oder unabhängig in $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Gibt es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$L \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

(Beachten Sie, dass es sich um dieselben Vektoren wie bei Teil a) handelt.) Begründen Sie Ihre Antwort.