Prof. Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
20.7.2018

Zweite Übungsklausur zur Linearen Algebra 1

Informationen zur Klausur: Die zweite Teilklausur/der zweite Teiltest findet statt am Freitag, 14.9.2018 um 10:15-11:15 Uhr im großen Hörsaal des IFIB (Lageplan siehe Homepage). Eine Anmeldung auf URM ist nicht erforderlich; wenn Sie beim ersten Teil dabei waren, sind Sie automatisch auch für den zweiten angemeldet.

Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei der Klausur nicht erlaubt. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass bei der Klausur Abschreiben und unerlaubte Kommunikation mit anderen Klausurteilnehmern Verletzungen der akademischen Integrität darstellen und schwerwiegende Konsequenzen haben können. Der Stoff der Klausur ist Kapitel 5-7 aus dem Skript und die Übungsblätter 7-11 (also einschließlich Determinanten). Alle Fakten, die in der Vorlesung erwähnt wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Sie können die Aufgaben zu Hause lösen; sie werden nicht korrigiert. Diese Übungsklausur ist länger als die echte Klausur. Es ist vorgesehen, dass Sie keine Bücher, Notizen oder elektronische Hilfsmittel benutzen.

Hinweise für die Klausur:

- Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen.
- Streichen Sie falsche oder irreführende Teile Ihres Aufschriebs, die nicht bewertet werden sollen, deutlich durch.

Aufgabe 1: (12 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

(b) Sind $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ paarweise orthogonal und alle $\neq 0$, dann bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

(c) Wenn A und B diagonalisierbar sind, dann auch $A + B$.

(d) Wenn $A \in M(n, \mathbb{C})$ reelle Eigenwerte und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzt, dann ist A selbst-adjungiert.

Aufgabe 2: Wahr oder falsch? (24 Punkte)

Kreuzen Sie $\boxed{\text{W}}$ an, wenn die Aussage wahr ist und $\boxed{\text{F}}$, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt 2 Punkte, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt -2 Punkte. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen keine Begründungen anzugeben.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Wenn S und R orthogonal sind, dann auch $S + R$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Es gibt reelle $n \times n$-Matrizen A derart, dass die gesamte Familie $A + cE_n$ invertierbar ist für alle $c \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Wenn A symmetrisch und positiv definit ist, dann auch A^{-1}.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Wenn A symmetrisch und positiv definit ist, dann auch A^2.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Es gibt komplexe 2×2-Matrizen ohne komplexe Eigenwerte.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Es gibt reelle 2×2-Matrizen ohne reelle Eigenwerte.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix hat immer Grad n.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Der Nullvektor kann niemals ein Eigenvektor sein.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Zahl Null kann niemals ein Eigenwert sein.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn Null kein Eigenwert ist.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Seien U und W Unterräume des Skalarproduktraumes V. Wenn $U \subseteq W$, dann $W^\perp \subseteq U^\perp$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Wenn das charakteristische Polynom von A die Form $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)^n$ hat, dann ist $A = E$.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

(b) Orthonormieren Sie die kanonische Basis (e_1, e_2, e_3) des $\mathbb{R}^3$ bzgl. des Skalarprodukts $S_A(x, y) := \langle x, Ay \rangle$ unter Verwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ bezeichne.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

☐ A ist selbstadjungiert

☐ A ist eine Projektion

☐ A ist unitär

☐ A ist invertierbar

Aufgabe 5: (6 Punkte)

(a) Sei A eine reelle anti-symmetrische 5×5-Matrix. Zeigen Sie, dass $\det A = 0$.
(b) Was ändert sich, wenn A eine reelle anti-symmetrische 4×4-Matrix ist?

Aufgabe 6: (9 Punkte)

(a) Sei $A \in M(3 \times 2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion P von $\mathbb{R}^3$ auf Bild A durch $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ gegeben ist, sofern $A^T A$ invertierbar ist. (*Hinweis:* $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$ *für alle invertierbaren Matrizen* B.)

(b) Seien nun $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Verifizieren Sie, dass hier $A^T A$ invertierbar ist, und berechnen Sie P und Py. Erläutern Sie, warum das Ergebnis zeigt, dass die Gleichung $Ax = y$ keine Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

(c) Bestimmen Sie den Vektor u in $\mathbb{R}^2$, für den $||Au - y|| = \min_{x \in \mathbb{R}^2} ||Ax - y||$, und berechnen Sie $||Au - y||$.

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Über eine Matrix $A \in M(2, \mathbb{R})$ wissen wir, dass sie die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 0$ hat und die zugehörigen Eigenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wieso wissen Sie dann, dass A symmetrisch ist?
(b) Bestimmen Sie die Determinante und die Spur von A, ohne A zu berechnen. Begründen Sie Ihre Antwort.
(c) Berechnen Sie A.

Aufgabe 8: (8 Punkte)

Seien U, W Unterräume des Skalarproduktraumes V. Zeigen Sie:

$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp.$$

Aufgabe 9: (6 Punkte)

Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.

(b) Der Satz von Cayley–Hamilton besagt, dass $P_A(A) = 0$. Benutzen Sie diesen Satz und Ihr Resultat aus Teil **(a)**, um Konstanten b, c, d zu finden, so dass $A^{-1} = bA^2 + cA + dE$. Dann benutzen Sie diese Relation, um A^{-1} zu berechnen, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Matrixmultiplikation mit A. *Berechnen Sie A^{-1} nicht auf andere Weise.*

Aufgabe 10: (5 Punkte)

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie die duale Basis $\hat{v}_1, \hat{v}_2$. (Schreiben Sie dabei $\hat{v}_1$ und $\hat{v}_2$ als Zeilenvektoren.)

Aufgabe 11: (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$