Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2018

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe 17.05.2018)

Aufgabe 17 (10 Punkte)

Wie betrachten das AWP $\quad y'(x) = 2 + y(x), \quad y(0) = 1.$

a) Lösen Sie das AWP (wie in früheren Aufgaben).

b) Berechnen Sie alle Picard-Iterierten $y_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, für das AWP.

c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ und vergleichen Sie mit Teil (a).

Hinweis: Berechnen Sie in Teil (b) zunächst, $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ und $y_3(x)$. Raten Sie davon ausgehend, wie $y_n(x)$ aussehen könnte. Beweisen Sie dann Ihre Vermutung.

Aufgabe 18 (10 Zusatzpunkte)

Wir möchten die folgende Menge zeichnen,

$$E = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{5}{8}(x^2 + y^2) + \frac{3}{4}xy = 1 \right\} .$$

a) Drücken Sie dazu zunächst die Bestimmungsgleichung in den gedrehten Koordinaten $(x', y')^T = D_\phi \, \vec{x}$ aus (D_ϕ wie in Aufgabe 14), und wählen Sie ϕ so, dass kein Term proportional zu $x'y'$ auftritt.

b) Zeichnen Sie E in einem xy-Koordinatensystem. Tragen Sie dazu zunächst das gedrehte $x'y'$-Koordinatensystem ein.

Hinweis: Die Gleichung $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ beschreibt eine Ellipse, vgl. Aufgabe 9.

Bemerkung: Wir werden bald lernen, wie man dieselbe Aufgabe mithilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren löst. Hier wird das jedoch nicht benötigt und soll auch nicht verwendet werden!

Aufgabe 19 (20 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem jeweils an, ob die Matrix diagonalisierbar ist.

Aufgabe 20 (keine Abgabe)

Zeigen Sie: Die unitären $n \times n$-Matrizen, $\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \overline{A}^T A = I\}$, bilden bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

Aufgabe 21 (2 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 27.05.18 auf `www.khanacademy.org` die *Skill*

- *Vertices & direction of a hyperbola.*

Hinweise: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).