Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2018
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe ausnahmsweise bis spätestens **Mi, 30.05.2018, 12:00** in die Mappen vor C6P43)

Aufgabe 22 (10 Punkte)

a) Führen Sie die HAT für die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T AU$ an.

b) Berechnen Sie e^{-Cx} für $x \in \mathbb{R}$ und C aus Aufgabe 19.
Hinweis: Bringen Sie die Matix C mithilfe einer HAT in Diagonalform.

Aufgabe 23 (2+2+6 = 10 Punkte)

Man nennt

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}\,, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}\,,$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von $\vec{y}$ Funktionen von x, und $\vec{y}\,'$ ist die komponentenweise Ableitung nach x, d.h.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

a) Rechnen Sie nach: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{u}$, so ist

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

b) Zeigen Sie: Jedes $\vec{y}$ der Form

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{Ax}\,\vec{b}\,, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, mit A aus Aufgabe 22.

Aufgabe 24 (10 Zusatzpunkte)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \phi \in \mathbb{R}\,.$$

b) Zeigen Sie: Ist $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, und ist λ ein Eigenwert von U, so folgt $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 25 (5+3+2 = 10 Punkte)
Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z. Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = \tfrac{1}{4} \right\} .$$

a) Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} := \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy-Ebene.
b) Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.
c) Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

Hinweis: Wenn Sie in (a) die Gleichung, die ein Punkt erfüllen muss, damit er sowohl in T als auch in einer Koordinatenebene liegt, etwas umstellen, kommen stets Kreise zum Vorschein.

Aufgabe 26 (2 Zusatzpunkte)
Üben Sie bis spätestens 10.06.18 auf `www.khanacademy.org` die *Skill*

- *Linear systems of equations capstone.*

Hinweise: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).