Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Sommersemester 2018
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe 07.06.2018)

Aufgabe 27 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T AU$ an.

Aufgabe 28 (20 Punkte)

Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $6x^2 + 2\sqrt{3}xy + 4y^2 = 1$

b) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 = 8$

c) $x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 = 1$

d) $4(x^2 - y^2) + 6xy = 5$

Aufgabe 29 (keine Abgabe)

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$.

b) Gegeben sei die quadratische Form ($\vec{x} = (x, y, z)^T$)

$$q_A(\vec{x}) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x + z) + 2axz\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a?

Aufgabe 30 (10 Zusatzpunkte)

Wir schreiben die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0 \qquad (*)$$

als ein DGL-System 1. Ordnung (vgl. Aufgabe 23). Definieren Sie dazu

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}\,,$$

und suchen Sie eine Matrix A, so dass $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ äquivalent zu $(*)$ wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL $(*)$.

Bemerkung: Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare), sehen Sie wie?