Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2018

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe 21.06.2018)

Aufgabe 35 (3+3+3+6 = 15 Punkte)
Wir betrachten nochmal die Funktionen f und q aus Aufgabe 31.

a) Für welche $\vec{x}$ sind f und q total differenzierbar? Geben Sie ∇f und ∇q an.
b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = \vec{0}$ in Richtung von $(1,1,0)^T$.
c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von q an der Stelle $\vec{x}_0 = (0,1,0)^T$ in Richtung von $(1,0,0)^T$.
d) Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen und geben Sie die Hesse-Matrizen $f''(\vec{x})$ und $q''(\vec{x})$ an.

Aufgabe 36 (5 Zusatzpunkte)
Wir betrachten nochmal die Funktion f aus Aufgabe 33. Ist f im Ursprung total differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 37 (10 Punkte)
Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$, $j = 1,2,3$, für $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$,
b) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$ und
c) $\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\binom{1}{0}$ nach $\binom{-1}{0}$.

Geben Sie auch jeweils Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs an.
Ist $\vec{f}$ konservativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 38 (10 Punkte)
Bestimmen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$, $j = 1,2$, für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} z\mathrm{e}^{xz} - 2x\cos(x^2+y^2) \\ \mathrm{e}^{-y^2} - 2y\cos(x^2+y^2) \\ x\mathrm{e}^{xz} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

$$\text{sowie} \quad \mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \log(1+3t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Zeichnen Sie außerdem $\mathfrak{K}_1$.

Aufgabe 39 (keine Abgabe)

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie $g_x(0,0)$ und $g_y(0,0)$.
b) Berechnen Sie g_x und g_y für $(x,y) \neq (0,0)$.
c) Bestimmen Sie $g_{xy}(0,0)$ und $g_{yx}(0,0)$.