Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2018
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 28.06.2018)

Aufgabe 40 (3+4+3= 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x, y) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1 - y^2}$ um $(0, 0)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x, y, z) = \cosh(z) - \sin(xy) - xz(y - 1)^{18}$ und $g(x, y) = \dfrac{\mathrm{e}^y - x}{1 + x^2}$.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Punkt $(0, -1, 1)$ von

$$f(x, y, z) = z^3 - 3z^2 + x^2 + 4yx + 2y + z + 18\,.$$

Hinweis: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 41 (8+7 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen

$$f(x, y) = (x - y)^4 - 7(x^2 + y^2) + 18xy \qquad \text{und} \qquad g(x, y) = (y^2 - y^4) + \sin(x)\,,$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$ (bzw. $\nabla g = 0$). Untersuchen Sie, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 42 (5 Zusatzpunkte)

Ist $y + xy^2 - \mathrm{e}^{xy} = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und geeignetem y_0 nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sie ggf. auch $f'(0)$.

Aufgabe 43 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach $\vec{y} = f(\vec{x})$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}\,,$$

auflösen lässt, und berechnen Sie $f'(0, -1)$.

Aufgabe 44 (keine Abgabe)

Wenn wir $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können wir auch Skalarprodukte und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden.

Man definiert für $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))^T$ und analog $\vec{g}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{(Divergenz)} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{(Rotation).}$$

Berechnen Sie (wo möglich) $\operatorname{div} \vec{f}$, $\operatorname{rot} \vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div} \operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - z \cos z \\ x \sin(yz) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$