

## Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe 05.07.2018)

---

### Aufgabe 45

(10 Punkte)

Für welche  $(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$  ist die Funktion

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?<sup>5</sup> Berechnen Sie auch  $f^{-1}(-8, 0, 0)$ ; geben Sie an, welchen Zweig Sie dabei gewählt haben.

### Aufgabe 46<sup>6</sup>

(10 Zusatzpunkte)

Für welche  $(r, u, v) \in [0, 1) \times \mathbb{R}^2$  ist die Funktion

$$f(r, u, v) = \begin{pmatrix} x(r, u, v) \\ y(r, u, v) \\ z(r, u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + r \sin u) \cos v \\ (1 + r \sin u) \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar? Was für ein Objekt ist durch die Teilmenge

$$\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = f(r, u, v), 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

gegeben?

### Aufgabe 47<sup>6</sup>

(10 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie das Minimum der Funktion  $f(x, y, z) = xyz$  auf der Kugeloberfläche  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . Wo wird das Minimum angenommen?

### Aufgabe 48

(10 Punkte)

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2 - 2x + 4y}$ .

- Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von  $f$ .
- Bestimmen Sie alle potentiellen Extremstellen von  $f$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 9$ . Können Sie entscheiden, ob es sich tatsächlich um Minima oder Maxima handelt?
- Sei  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$ . Bestimmen Sie  $\max_{(x,y) \in D} f(x, y)$  und  $\min_{(x,y) \in D} f(x, y)$ .

HINWEIS: Denken Sie neben Satz 37 auch an Satz 28.

### Aufgabe 49

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Masse  $m$  des inhomogenen Einheitswürfels  $W = [0, 1]^3$  mit Dichte

$$f(x, y, z) = x^2 z e^{xyz} + y e^{xy},$$

d.h. berechnen Sie  $m := \int_W f \, dV$ .

---

<sup>5</sup>Das heißt wo existiert eine Funktion  $f^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} r(x, y, z) \\ \vartheta(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) \end{pmatrix}$ ?

<sup>6</sup>Zusatzaufgaben werden evt. nicht (oder nicht vollständig) in den Übungsgruppen besprochen.