Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2018

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 12.07.2018)

Aufgabe 51 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumen $|E| = \int_E \mathrm{d}V$ des Ellipsoids

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} , \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+ .$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ positiv definit und $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle \leq 1\}$. Bestimmen Sie $|K|$.
Hinweis: Laut Satz 25 existiert eine orthogonale Matrix U, so dass $U^T AU$ diagonal ist. Die Transformation $\vec{y} = U^T \vec{x}$ bietet sich also an.

Aufgabe 52 (Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumenelement $\mathrm{d}V$ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z), definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} , \quad (x, y, z : \text{ kartesisch}) ,$$

b) Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche des Paraboloids

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq z \leq 9 \right\} .$$

und zeichnen Sie P.

Aufgabe 53 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen des Torus[7]

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r\sin u)\cos v \\ (1 + r\sin u)\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix} , \ 0 \leq r \leq \tfrac{1}{2} , \ 0 \leq u < 2\pi , \ 0 \leq v < 2\pi \right\} ,$$

d.h. berechnen Sie $\int_T \mathrm{d}V$, und seine Oberfläche, d.h. $\int_{\partial T} \mathrm{d}O$, wobei

$$\partial T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{1}{2}\sin u)\cos v \\ (1 + \frac{1}{2}\sin u)\sin v \\ \frac{1}{2}\cos u \end{pmatrix} , \ 0 \leq u < 2\pi , \ 0 \leq v < 2\pi \right\} .$$

---

[7] vgl. Aufgaben 25 & 46

Aufgabe 54 (Wiederholung: Summen, Reihen, Integrale)[8] (20 Zusatzpunkte)

Sei (für $p, \lambda, \sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)

$$b(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,, \qquad P(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,, \qquad f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b(k;n,p)\,, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\, b(k;n,p)\,, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2\, b(k;n,p)\,,$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(k;\lambda)\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(k;\lambda)\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, P(k;\lambda)\,,$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x\,,$

Hinweis: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,,$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu_1,\sigma_1^2}(y)\, f_{\mu_2,\sigma_2^2}(x-y)\,\mathrm{d}y\,,$ Ergebnis: $f_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x)\,.$

[8] Diese Aufgabe kann bis zum 19.07.2018 abgegeben werden. Die Aufgabe wird nicht in den Übungen besprochen. Wir helfen aber gerne bei der Bearbeitung, wenn Sie z.B. Fragen oder Lösungsansätze im Webforum posten.