

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe 19.07.2018)

Aufgabe 55

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 6, z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S ohne Verwendung eines Integralsatzes.

HINWEIS: Ebene Polarkoordinaten, $dx dy = r dr d\varphi$, sind hilfreich.

Aufgabe 56

(10 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Fluss (von innen nach außen) der Vektorfelder $\vec{v}_1(\vec{x}) = \vec{x}$ und $\vec{v}_2(\vec{x}) = (\cos z, x^2, y)^T$ durch die Oberfläche des Torus T aus den Aufgaben 25, 46 und 53.

Aufgabe 57

(10 Zusatzpunkte)

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei K die Kugel mit Radius R .

- a) Bestimmen Sie $\int_{\partial K} \vec{f} d\vec{O}$ (ohne Verwendung eines Integralsatzes).
- b) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{f}$.
- c) Bestimmen Sie $\int_K \operatorname{div} \vec{f} dV$ für $\alpha < 3$.
- d) Bilden Sie den Limes $\alpha \rightarrow 3$ für $\operatorname{div} \vec{f}$ und berechnen Sie $\int_K (\lim_{\alpha \rightarrow 3} \operatorname{div} \vec{f}) dV$.
Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Teil (a) für $\alpha = 3$. Erklären Sie den scheinbaren Widerspruch.

Aufgabe 58

(10 Punkte)

Berechnen Sie $\oint_{\mathfrak{K}} \vec{v} d\vec{x}$ für

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + z \\ \tanh y \\ 3x - \sin y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2 \sin t \\ 8 \\ 2 \cos t - 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Aufgabe 59 (Vorschau: Stochastik)

(12 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 22.07.18 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Basic set notation,*
- *Subsets of sample spaces,*
- *Simple probability,*
- *Probabilities of compound events,*
- *Independent probability* und
- *Dependent probability.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).