

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (keine Abgabe)

Aufgabe 60

- a) Sei $\Omega = \{T, \ddot{u}, b, i\}$. Bestimmen Sie jeweils $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_j, \Omega)$ für $\mathcal{M}_1 = \{\{\ddot{u}\}\}$, $\mathcal{M}_2 = \{\{b\}, \{i\}\}$ und $\mathcal{M}_3 = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ mit } |A| = 2\}$.
- b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_1$ die Menge aller offenen Intervalle (a, b) aus $\mathbb{R}$ sowie $\mathcal{M}_2$ die Menge aller abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ aus $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Die erzeugten σ -Algebren sind gleich⁹, d.h. $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_1, \Omega) = \mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_2, \Omega)$.

Aufgabe 61

- a) Nach dem Verpacken von sechs verschiedenen Geschenken kann Geli den Inhalt nicht mehr erkennen. Eines war für Klaus, zwei für Lothar und drei für Susanne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Verteilung der Geschenke (in der richtigen Anzahl!) alle die richtigen erhalten?
- b) Wir zeigen: Sind die Ereignisse A_j , $j = 1, \dots, n$ paarweise unabhängig, d.h.

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j) P(A_k) \quad \forall j \neq k$$

so folgt daraus **nicht** $P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = \prod_{j=1}^n P(A_j)$.

BEISPIEL: Ein fairer Würfel werde zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse $A_1 = \text{“der erste Wurf liefert eine gerade Zahl”}$, $A_2 = \text{“der zweite Wurf liefert eine ungerade Zahl”}$ und $A_3 = \text{“die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade”}$. Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

⁹Es handelt sich nämlich in beiden Fällen um die Borel- σ -Algebra über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 62

Eine Krankheit trete bei 1% der Bevölkerung auf (Prävalenz). Ein Labortest liefert bei 98% der Kranken ein positives Ergebnis (Sensitivität). Derselbe Test liefert bei 95% der Gesunden ein negatives Ergebnis (Spezifität). Wir möchten folgende Frage beantworten:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (einer zufällig ausgewählten, getesteten Person), krank zu sein, wenn der Test positiv ist?

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- a) Geben Sie wie beim Gefangenendilemma aus der Vorlesung eine geeignete Ergebnismenge Ω an.

Bezeichnen Sie mit A_1 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit hat, mit A_2 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit nicht hat (also $A_2 = A_1^C$) und mit B das Ereignis, dass der Test positiv ausfällt.

- b) Geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten und alle bedingten Wahrscheinlichkeiten an, die sich unmittelbar aus dem Aufgabentext ergeben.
- c) Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe des Satzes von Bayes.
- d) Geben Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Test bei einer zufällig ausgewählten Person positiv ausfällt.