Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2018
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Klausur am 31.07.2018

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 106 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^4 \log x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1}\mathrm{d}x$ HINWEISE: $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2-7x+8}{(x-8)(x^2-64)}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $(1+x^2)y' = xy,\ y(0) = 1$.

Aufgabe 3 (4+4+2 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 9y' + 8y = 0$.

b) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 9y' + 8y = \mathrm{e}^{-x}$.

c) Lösen Sie das AWP $y'' + 9y' + 8y = \mathrm{e}^{-x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = -\frac{6}{7}$.

Aufgabe 4 (9+2+3 = 14 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A U$.

c) Bestimmen Sie $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^{2018}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$5(x^2 + y^2) + 6xy = 8$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn (in einem xy-Koordinatensystem).

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x, y) = (y^2 - 1)^2 + x^2\,,$$

d.h. alle (x, y) mit $(\nabla f)(x, y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Bestimmen Sie Minimum und Maximum der Funktion $f(x, y) = x + 2y$ unter der Nebenbedingung $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$. Wo werden Minimum und Maximum angenommen?

Aufgabe 8 (10 Punkte)
Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T$ und $f(\vec{x}) = 1 - z^2$. Berechnen Sie

$$\int_{|\vec{x}| \leq 1} f \; \mathrm{d}V\,.$$

Aufgabe 9 (10 Punkte)
Sei $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0 \text{ und } 0 \leq y \leq \mathrm{e}^{-x^2} \right\}$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_B xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Aufgabe 10 (10 Punkte)
Sei $W = [0, 1]^3$ der Einheitswürfel mit (stückweise) parametrisierter Oberfläche ∂W so, dass die Normale $\vec{n}$ nach außen zeigt. Weiter sei $\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial W} \vec{f} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O$. HINWEIS: Ein Integralsatz ist hilfreich.