Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2018

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 16.10.2018

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 103 Punkte erreichbar, 82 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 41 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)
Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{12+7x-3x^2}{(x-3)(x^2-9)}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $(1+x^2)y' = xy - x,\ y(0) = 1$.

Aufgabe 3 (4+2+2 = 8 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 2y' + 5y = 0$.

b) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 2y' + 5y = 1$.

c) Lösen Sie das AWP $y'' + 2y' + 5y = 1$, $y(0) = \frac{1}{5}$, $y'(0) = 1$.

Aufgabe 4 (7+2+4 = 13 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren von A.

b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A\, U$.

c) Finden Sie eine Matrix B, für die $B^2 = A$ gilt.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$5(x^2 + y^2) - 6xy = 8$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn (in einem xy-Koordinatensystem).

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x, y) = x\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,,$$

d.h. alle (x, y) mit $(\nabla f)(x, y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Bestimmen Sie Minimum und Maximum der Funktion $f(x, y) = y - x$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + xy = 1$. Wo werden Minimum und Maximum angenommen?

Aufgabe 8 (10 Punkte)
Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T$ und $f(\vec{x}) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie

$$\int_{|\vec{x}|\leq 1} f \;\mathrm{d}V\,.$$

Aufgabe 9 (10 Punkte)
Sei $(0, 0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Taylorreihe von f um $(0, 0)$ sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} x^{\nu} y^{n-\nu}\,.$$

Bestimmen Sie $f(0, 0)$, $(\nabla f)(0, 0)$ sowie die Hesse-Matrix $f''(0, 0)$.

Aufgabe 10 (10 Punkte)
Sei $B = [0, 1]^2$ das Einheitsquadrat mit (stückweise) parametrisiertem Rand ∂B so, dass B im Gegenuhrzeigersinn umlaufen wird. Weiter sei $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y^3 \\ -x \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial B} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$. Hinweis: Ein Integralsatz ist hilfreich.