Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
29. Juni 2018

Integralsätze

Übungsblatt 10

Aufgabe 20: Verallgemeinertes Kreuzprodukt (50 Punkte)
Für $n-1$ Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ sei das verallgemeinerte Kreuzprodukt $\underline{K} : (\mathbb{R}^n)^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\underline{K}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n-1,1} & \underline{e}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{n-1,n} & \underline{e}_n \end{vmatrix}, \text{ wobei } \underline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix}$$

und $\underline{e}_j$ der j-te kanonische Einheitsvektor ist. (Das kann man so verstehen: $\det(\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_{n-1}, \underline{b})$ ist eine lineare Funktion von $\underline{b}$, sagen wir $=: \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k$; setze $\underline{K} := \sum_{k=1}^n \alpha_k \underline{e}_k$.) Zeigen Sie:

a) Für alle $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\underline{K}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1}) \cdot \underline{b} = \det(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1}, \underline{b})$.

b) $\underline{K}(\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_{n-1}) \perp \underline{a}_j$ für alle $j = 1, \ldots, n-1$.

c) $\|\underline{K}(\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_{n-1})\| = \mathrm{Vol}_{n-1} P_{n-1}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1})$, wobei Vol_{n-1} das $(n-1)$-dimensionale Volumen bedeutet und

$$P_{n-1}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1}) = \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \underline{a}_j : \beta_j \in [0,1]\, \forall j \right\}$$

das von $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1}$ aufgespannte Parallelotop. Geben Sie dafür ein geometrisches Argument. (*Tipp*: $\mathrm{Vol}_n(P_n(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)) = |\det(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)|$, und eine geschickte Wahl von $\underline{a}_n$ hilft.)

Aufgabe 21: Inhalt der 3-Sphäre (50 Punkte)
Die 3-Sphäre $S^3 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 : \|\underline{x}\| = 1\}$ lässt sich durch Kugelkoordinaten

$$\phi(\varphi, \theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\varphi \\ \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\varphi \\ \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}$$

von $D = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aus parametrisieren. Bestimmen Sie

$$\mathrm{Vol}_3(S^3) = \int_D d^3(\varphi, \theta_1, \theta_2)\, \|\underline{K}(\phi_\varphi, \phi_{\theta_1}, \phi_{\theta_2})\|\,.$$

Tipp: Man erhält das Integral $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2\, \cos^2\theta_1\, \cos\theta_2$ und muss das noch auswerten.

Abgabe: Am Freitag, 13.7.2018, in der Vorlesung.