Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
13. Juli 2018

Integralsätze

Übungsblatt 11

Aufgabe 22: Flächen-unabhängige Integrale (50 Punkte)
So wie das Wegintegral eines Gradientenfeldes von $\underline{p}$ nach $\underline{q}$ unabängig von der Wahl des Weges von $\underline{p}$ nach $\underline{q}$ ist, so ist das Flächenintegral eines Rotationsfeldes unabängig von der Wahl der Fläche, die in eine gegebene Randkurve eingespannt wird. Das heißt: Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ stückweise C^1-Flächen in $\mathbb{R}^3$ mit $\partial\mathcal{F}_1 = \partial\mathcal{F}_2$ inklusive Orientierung, und ist $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^1, dann gilt

$$\int_{\mathcal{F}_1} \operatorname{rot} \underline{f} \cdot d\underline{S} = \int_{\mathcal{F}_2} \operatorname{rot} \underline{f} \cdot d\underline{S}\,. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie dies aus dem Integralsatz von Stokes.

b) Zeigen Sie dies aus dem Integralsatz von Gauß.

Aufgabe 23: Anti-symmetrische Tensoren (50 Punkte)
Für die Zwecke dieser Aufgabe sei ein *Tensor* der Stufe k über dem $\mathbb{R}^d$ ein Schema aus d^k Zahlen $C_{i_1\ldots i_k}$. Ein Tensor heißt *anti-symmetrisch*, wenn sich beim Vertauschen zweier Indizes stets das Vorzeichen ändert, $C_{\ldots i_j \ldots i_\ell \ldots} = -C_{\ldots i_\ell \ldots i_j \ldots}$ (wobei i_ℓ an die j-te Stelle kommt und i_j an die ℓ-te, und alle anderen Indizes unverändert bleiben). Überlegen Sie sich (ohne Abgabe), dass die anti-symmetrischen Tensoren einen Unterraum (genannt $\Lambda^k\,\mathbb{R}^d$) im Raum aller Tensoren bilden. Zeigen Sie:

$$\dim \Lambda^k\,\mathbb{R}^d = \begin{cases} 0 & \text{falls } k > d \\ \binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!} & \text{falls } 0 \le k \le d\,. \end{cases} \tag{2}$$

(*Tipp*: Die Frage läuft darauf hinaus, wie viele der Einträge $C_{i_1\ldots i_k}$ man unabängig voneinander wählen kann. Der Binomialkoeffizient $\binom{d}{k}$ gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer d-elementigen Menge an.)

Abgabe: Am Freitag, 20.7.2018, in der Vorlesung.