Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
4. Mai 2018

Integralsätze

Übungsblatt 3

Aufgabe 5: Krümmung einer ebenen Kurve (100 Punkte)
Sei $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine durch Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve. Man definiert die *Krümmung* von γ im Punkt $\gamma(s)$ durch

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| \,. \tag{1}$$

(a) Für den Kreis um $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ vom Radius $R > 0$, nämlich $\tilde{\gamma}(t) = \underline{x} + R(\cos t, \sin t)$ für $t \in [0, 2\pi]$, bestimme man die Parametrisierung γ durch Bogenlänge und die Krümmung $\kappa(s)$ für alle s.

(b) Gegeben sei eine C^2-Kurve $\tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{\gamma}'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Man zeige, dass sich ihre Krümmung κ an einem Punkt $\tilde{\gamma}(t)$ direkt, ohne explizite Bestimmung der Bogenlängen-parametrisierung $s \mapsto \gamma(s)$, errechnen lässt durch

$$\kappa = \frac{\|T'(t)\|}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|} \,, \tag{2}$$

wobei $T(t)$ der Einheits-Tangentialvektor in $\tilde{\gamma}(t)$ ist,

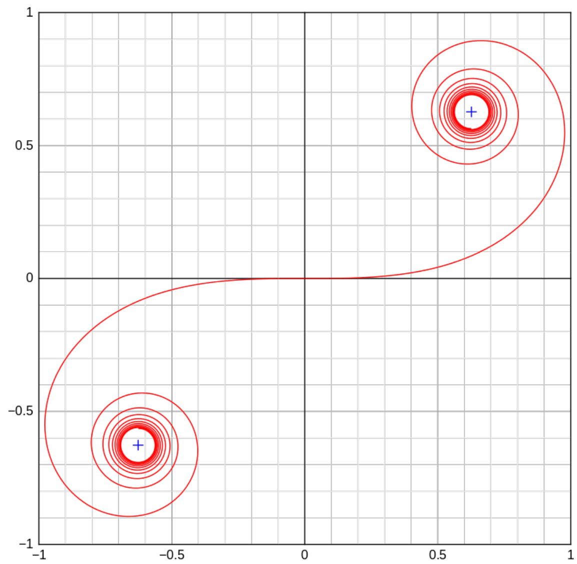
$$T(t) = \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|} \,. \tag{3}$$

(Tipp: Es kann zur Übersichtlichkeit beitragen, statt $\varphi(t)$ einfach $s(t)$ zu schreiben, statt $\tilde{\gamma}(t)$ einfach $x(t)$, statt $\gamma(s)$ einfach $x(s)$, statt $\tilde{\gamma}'$ dann dx/dt und statt γ' eben dx/ds.)

(c) Anschaulich gibt κ an, wie stark der Fahrer eines Autos, das entlang Spur γ fährt, das Lenkrad einschlagen muss. Da der Fahrer eine gewisse Zeit braucht, um das Lenkrad zu bewegen, wäre es keine gute Idee für den Straßenbau, einen Kreisbogen mit einem geraden Stück ohne Übergang zu verbinden. Ein guter Übergang wäre ein Stück Kurve, dessen Krümmung κ *linear* wächst; eine solche Kurve existiert und ist bekannt unter dem Namen *Euler-Spirale* oder *Cornu-Spirale* (entdeckt 1694 von Jakob Bernoulli):

$$\gamma_1(s) = \int_0^s \cos \frac{u^2}{2}\, du \,, \quad \gamma_2(s) = \int_0^s \sin \frac{u^2}{2}\, du \,.$$

Man verifiziere, dass diese Kurve durch Bogenlänge parametrisiert ist und $\kappa(s) = s$ erfüllt.



Abgabe: Am Freitag, 11.5.2018, in der Vorlesung.