Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
11. Mai 2018

# Integralsätze

Übungsblatt 4

**Aufgabe 6: Verschwindender Gradient** (20 Punkte)
In Analysis 1 wurde gezeigt, dass eine $C^1$-Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, deren Ableitung überall verschwindet, konstant sein muss. Zeigen Sie daraus: Wenn $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist und $F : G \to \mathbb{R}$ ein $C^1$-Skalarfeld mit $\nabla F = 0$, dann ist $F$ konstant.

**Aufgabe 7: Stammfunktionen bestimmen** (50 Punkte)
Man bestimme (mit Beweis) alle $C^1$-Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, deren Gradient von der Form

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{2x}y + xy^2 + g(y) \\ x^2y + 4y^3x + h(x) \end{pmatrix}$$

mit irgendwelchen (nicht vorgegebenen) $C^1$-Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. (*Tipp*: Die Lösung enthält vier beliebige Konstanten.)

**Aufgabe 8: Konservative Vektorfelder** (30 Punkte)
Sei $\underline{A}$ wie in Aufgabe 4 auf Blatt 2 das Vektorfeld

$$\underline{A}(x_1,x_2) = \frac{b}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

für $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ mit $b \neq 0$. Aus Aufgabe 4 folgt, dass $\underline{A}$ nicht konservativ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\partial A_1/\partial x_2 = \partial A_2/\partial x_1$.

(b) Wie kann das sein? Wieso folgt aus (a) nicht mit dem Integrabilitätskriterium, dass $\underline{A}$ konservativ ist?

(c) Seien $(r,\varphi)$ Polarkoordinaten, $(x_1,x_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Hierbei hat man die Freiheit, für $\varphi$ irgendein Intervall $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ der Länge $2\pi$ wählen; dann ist $\varphi$ als Funktion von $(x_1,x_2)$ auf der geschlitzten Ebene $E_\alpha := \mathbb{R}^2 \setminus \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha) : r \geq 0\}$ stetig differenzierbar. Erklären Sie geometrisch, warum auf $E_\alpha$ gilt $\underline{A} = b\nabla\varphi$. Also ist $\underline{A}$ lokal ein Gradient.

**Abgabe:** Am Freitag, 18.5.2018, in der Vorlesung.