Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
8. Juni 2018

Integralsätze

Übungsblatt 7

Aufgabe 14: Greensche Formeln in 2d (60 Punkte)
Der Laplace-Operator in $\mathbb{R}^2$ ist definiert als $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 = \nabla \cdot \nabla = \text{div grad}$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und seien $F, G : U \to \mathbb{R}$ C^2-Skalarfelder. Sei $\gamma : [a, b] \to U$ ein geschlossener Weg, stückweise C^1, injektiv auf $[a, b)$, und positiv orientiert; sei B die von γ umlaufene Region, und sei $\underline{n}(\underline{x})$ der äußere Einheitsnormalenvektor auf ∂B am Punkt $\underline{x}$. Es bedeute $\partial F/\partial \underline{n}$ die Richtungsableitung von F in Richtung $\underline{n}$. Zeigen Sie:

(a) $\int_B \Delta F \, d^2\underline{x} = \int_\gamma \frac{\partial F}{\partial \underline{n}} \, ds$

(b) $\int_B (F \Delta G + \nabla F \cdot \nabla G) \, d^2\underline{x} = \int_\gamma F \frac{\partial G}{\partial \underline{n}} \, ds$

(c) $\int_B (F \Delta G - G \Delta F) \, d^2\underline{x} = \int_\gamma (F \frac{\partial G}{\partial \underline{n}} - G \frac{\partial F}{\partial \underline{n}}) \, ds$

Aufgabe 15: Torus als glatte Fläche (40 Punkte)
Der Torus sei die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^3$ mit Abstand $r > 0$ vom Kreis mit Radius $R > r$ um den Ursprung in der xy-Ebene. Geben Sie eine glatte Parametrisierung $\phi(\varphi, \theta)$ des Torus mit Parameterbereich $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ an, berechnen Sie den Normalenvektor $\phi_\varphi \times \phi_\theta$ und weisen Sie nach, dass die Definition 2.1 einer glatten Fläche erfüllt ist.

Abgabe: Am Freitag, 15.6.2018, in der Vorlesung.