Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
22. Juni 2018

Integralsätze

Übungsblatt 9

Aufgabe 18: Rotationsfläche (50 Punkte)
Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine C^1-Funktion, und sei $\mathcal{F}$ die glatte Fläche im $\mathbb{R}^3$, die entsteht, indem man den Graphen von f um die x-Achse rotieren lässt. Es geht um die folgende Formel für den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$:

$$I(\mathcal{F}) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,. \tag{1}$$

(a) Leiten Sie diese Formel durch eine anschauliche geometrische Betrachtung her.

(b) Beweisen Sie die Formel aus der Definition 2.4.

Aufgabe 19: (50 Punkte)
Sei $\mathcal{F}$ noch einmal (wie in Aufgabe 16) die nördliche Hemisphäre vom Radius 1 um den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ mit der Orientierung, in der $\underline{n}$ nach außen zeigt. Das C^1-Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\underline{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}\,.$$

Man berechne $\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \underline{f} \cdot d\underline{S}$.

(*Tipp*: Integrale von Produkten oder Potenzen von Winkelfunktionen lassen sich oft auswerten, indem man die Winkelfunktion durch die komplexe Exponentialfunktion ausdrückt.)

Abgabe: Am Freitag, 29.6.2018, in der Vorlesung.