Prof. Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2018
20.7.2018

Übungsklausur Integralsätze

Hinweise: Diese Übungsklausur können Sie zu Hause lösen, sie wird nicht korrigiert. Die Klausur findet am Freitag, 27.7.2018 um 12:00 bis 12:30 Uhr im Hörsaal N6 statt. Die Übungsklausur ist länger als die echte Klausur. Die erreichbaren Punktzahlen addieren sich auf 100. Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei dieser Klausur nicht erlaubt. Alle Fakten, die in der Vorlesung oder den Übungen erwähnt wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? (24 Punkte)

Kreuzen Sie $\boxed{\text{W}}$ an, wenn die Aussage wahr ist und $\boxed{\text{F}}$, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt 6 Punkte, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt -6 Punkte. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen keine Begründungen anzugeben.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Der Torus im $\mathbb{R}^3$ ist eine orientierbare Fläche.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Das Wegintegral eines stetigen Vektorfeldes in $\mathbb{R}^3$ über einen geschlossenen Weg ist immer 0.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\underline{f}(x,y,z) = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{2}{x+y}, z^2\right)$ ist ein Gradientenfeld in $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Eine Randkurve γ der Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ mit Orientierung $\underline{n}$ ist genau dann positiv orientiert, wenn $\gamma'(t) \times \underline{n}(\gamma(t))$ stets zum Inneren von $\mathcal{F}$ zeigt.

Aufgabe 2: (30 Punkte)

Gegeben sei eine glatte Fläche $\mathcal{F}$, gesucht ihr Schwerpunkt $\underline{a}$ unter der Annahme, dass die Flächendichte der Masse auf $\mathcal{F}$ konstant ist.

a) Drücken Sie die Komponenten a_1, a_2, a_3 von $\underline{a}$ durch Flächenintegrale aus.

b) Sei $\mathcal{F}$ die nördliche Hemisphäre vom Radius 1 mit Mittelpunkt im Ursprung. Berechnen Sie $\underline{a}$.

Tipp: Die Sphäre vom Radius r ist in Kugelkoordinaten parametrisiert durch

$$\phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

mit Azimut (Längengrad) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und Polwinkel (Breitengrad) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3: (21 Punkte)

a) Formulieren Sie den Greenschen Integralsatz (mit Voraussetzungen für volle Punktzahl).

b) Leiten Sie folgende Aussage aus dem Greenschen Integralsatz her: Ist der geschlossene Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ stückweise C^1, injektiv auf $[a, b)$ und positiv orientiert, dann ist für die von γ umlaufene Region B

$$\text{Flächeninhalt}(B) = \frac{1}{2} \int_\gamma x\, dy - y\, dx\,. \tag{1}$$

c) Werten Sie die rechte Seite von (1) für den Fall $B = [0, 1]^2$ aus, ohne Gleichung (1) zu benutzen.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

In $\mathbb{R}^3$ sei $\underline{f}(\underline{x}) = g(\|\underline{x}\|)\underline{x}$. Finden Sie eine C^1-Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ so, dass $\operatorname{div} \underline{f} = 3 + 3\|\underline{x}\|^2$. Zeigen Sie außerdem, dass $\underline{f}$ ein Gradientenfeld ist, und finden Sie eine Stammfunktion F von $\underline{f}$.