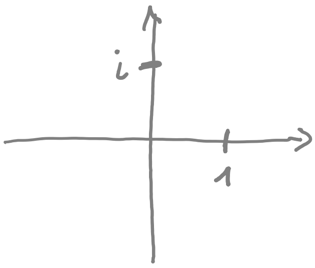
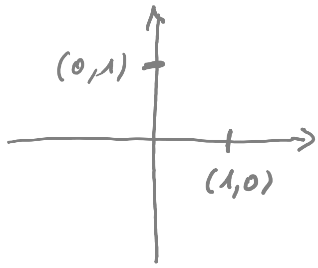
1. Stunde am 15. April

Thursday, 11 April 2019 10:30

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ **Euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$**



$$\boxed{z = x + iy \cong (x,y) = \vec{z}}$$



$\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ sind kanonisch isomorph als Mengen

Addition: $\overrightarrow{(z+w)} = \vec{z} + \vec{w}$

Addition in $\mathbb{C}$ Addition in $\mathbb{R}^2$

Metrische Struktur: $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \|\vec{z}\|$

Betrag in $\mathbb{C}$ euklidische Norm in $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ sind isomorph als metrische Räume:

- $U \subset \mathbb{C}$ ist offen/kompakt $\Leftrightarrow$ $U \subset \mathbb{R}^2$ ist offen/kompakt.
- $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ in $\mathbb{C}$ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \vec{z}_n = \vec{z}$ in $\mathbb{R}^2$

Aber: Als Vektorräume sind $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ <u>nicht</u> isomorph!

$\mathbb{C}$ ist 1-dim. $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist 2-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum

Lineare Abb.:

$\omega \in \mathrm{Mat}(1\times 1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$

$L_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \; z \mapsto w \cdot z$ $\qquad$ $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; \vec{z} \mapsto A\vec{z}$

Jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist aber auch $\mathbb{R}$-linear (offenbar!)

Die Matrixdarstellung von L_w ergibt sich aus

$$\vec{z} \mapsto \overrightarrow{L_w z} = \overrightarrow{(u+iv)\cdot(x+iy)} = (ux - vy, uy + vx)$$

$$= \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: A_w \vec{z}\,,$$

also $A_w = (\vec{w} \mid \vec{iw})$.

Folgerung 1: Eine Matrix $A = (\vec{w}_1 \mid \vec{w}_2) \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$ induziert genau dann eine $\mathbb{C}$-lin. Abbildung auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, wenn

$$w_2 = i w_1 \iff \tfrac{1}{2}(w_1 + i w_2) = 0\,.$$

In diesem Fall ist

$$A\vec{z} = \overrightarrow{L_w z} \quad \text{für } w = w_1\,.$$

Definition: Komplexe Differenzierbarkeit

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich (d.h. offen und nichtleer).
Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt <u>komplexe</u> <u>diffbar</u> an der Stelle $z_0 \in U$, wenn

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Wir schreiben statt $f'(z_0)$ dann auch manchmal

$$\frac{df}{dz}(z_0).$$

Ist f für alle $z_0 \in U$ komplex diffbar, so heißt sie holomorph. Die dann definierte Funktion $f': U \to \mathbb{C}$ heißt Ableitung von f und f heißt Stammfkt. von f'.

[Erinnerung: Dass $\lim_{z \to z_0} g(z)$ existiert, bedeutet, dass für jede Folge (z_n) in U mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ aber $z_n \neq z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g(z_n)$ in $\mathbb{C}$ existiert. Dieser Grenzwert ist dann automatisch unabhängig von der gewählten Folge (z_n). Vgl. Analysis 1]

Wortwörtlich wie in Analysis 1 zeigt man nun, dass komplex diffbare Funktionen stetig sind und auch die üblichen Ableitungsregeln gelten:

Seien $f, g: U \to \mathbb{C}$ holomorph, dann sind auch $f+g: U \to \mathbb{C}$, $f \cdot g: U \to \mathbb{C}$ und $\frac{f}{g}: U \setminus \{g=0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und es gilt

$$(f+g)' = f'+g', \quad (f \cdot g)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Ist $h: V \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(U) \subset V$, so gilt auch die Kettenregel:

$$(f \circ h)'(z_0) = (f' \circ h)(z_0) \cdot h'(z_0)$$

Definition: Für jeden Bereich $U \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum der holomorphen Funktionen $f: U \to \mathbb{C}$ mit $H(U)$.

Beispiel: Da konstante Fkt. Ableitung Null haben und die Identität $id: z \mapsto z$ Ableitung Eins hat, sind

Polynomfkt. $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und es gilt:

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1} .$$

Ebenso sind rationale Fkt. auf $\mathbb{C} \setminus \{\text{Nennernullstellen}\}$ holomorph.

Zusammenhang mit reeller Diffbarkeit

Differenzierbarkeit bedeutet lineare Approximierbarkeit und die Ableitung einer Funktion in einem Punkt liefert dort die lineare Approximation an die Fkt.: Wie im Reellen ist $f: U \to \mathbb{C}$ genau dann bei $z_0 \in U$ komplexe diffbar mit Ableitung $f'(z_0)$, wenn

$$\boxed{f(z) = f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)\cdot(z-z_0)}_{L_{f'(z_0)}(z-z_0)} + o(|z-z_0|)}$$

„lineare Approximation"

Andererseits ist $f: U \to \mathbb{R}^2$ total (reell) diffbar bei z_0, wenn

$$\boxed{f(\vec{z}) = f(\vec{z}_0) + Df|_{z_0}\cdot(\vec{z}-\vec{z}_0) + o(\|\vec{z}-\vec{z}_0\|)}$$

wobei $Df|_{z_0} = (\partial_x f \mid \partial_y f)$ die Jacobimatrix im Punkt z_0 bezeichnet.

Aus Folgerung 1 ergibt sich nun unmittelbar, dass

- jede komplexe diffbare Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ ist auch reell diffbar mit
$$Df = (f' \mid i f').$$
- eine reell diffbare Funktion $f: U \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann komplex diffbar, wenn
$$\boxed{\partial_y f = i\,\partial_x f} \qquad (*)$$
gilt (da dann Df eine $\mathbb{C}$-lin. Abb. liefert.)
In diesem Fall ist $f' = \partial_x f = -i\,\partial_y f$.
Die Gleichung $(*)$ heißt <u>Cauchy-Riemannsche</u>

Differentialgleichung. Schreibt man

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

so ist die Jacobimatrix

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

und (∗) wird zu

$$\boxed{\partial_x u = \partial_y v \quad \text{und} \quad \partial_y u = -\partial_x v.}$$

Führt man die Differentialoperatoren

$$\partial := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \quad \text{und} \quad \bar{\partial} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

ein, so lässt sich das Gesagte wie folgt zusammenfassen:

Satz: Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Es ist genau dann $f \in H(U)$, wenn f reell differenzierbar in U ist und dort die CR-DGL

$$\bar{\partial} f = 0$$

erfüllt. In diesem Fall ist $f' = \partial f$.

Beispiel: Die komplexe Exponentialfunktion

Es ist $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x \cos y} + i\,\underbrace{e^x \sin y}$

Es ist $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$

und somit

$$\partial_x u = e^x \cos y = \partial_y v \quad \text{und} \quad \partial_y u = -e^x \sin y = -\partial_x v.$$

Also ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$ holomorph und

$$(e^z)' = \partial_x u + i \partial_x v = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z .$$

<u>Beispiel</u>: Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \bar{z}$ ist <u>nicht</u> holomorph:

$$\bar{\partial} f = \tfrac{1}{2} (\partial_x + i \partial_y)(x - iy) = \tfrac{1}{2}(1+1) = 1 \neq 0 .$$

Dafür gilt aber

$$\partial f = \tfrac{1}{2} (\partial_x - i \partial_y)(x - iy) = \tfrac{1}{2}(1-1) = 0 .$$

Man schreibt daher auch oft $\bar{\partial} =: \partial_{\bar{z}}$ und $\partial =: \partial_z$ und merkt sich, dass Funktionen die auch von $\bar{z}$ abhängen im Allg. nicht holomorph sind.