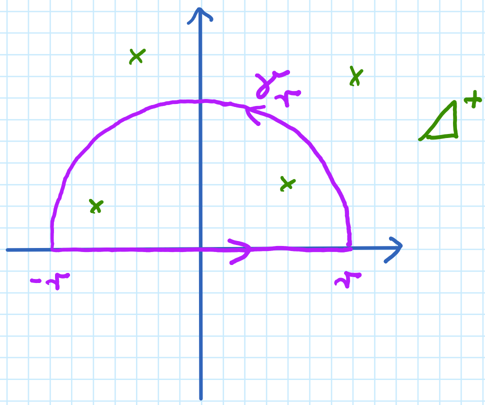
Mit Hilfe des Residuensatzes lassen sich verschiedene Typen von reellen Integralen auf einfache Weise berechnen.

__Satz 10.1__ Sei $f(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ eine rationale Funktion, also q und p Polynome, wobei $\mathrm{Grad}(p) \geq \mathrm{Grad}(q) + 2$ sei und p keine Nullstellen auf der reellen Achse habe. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z\in\Delta^+} \mathrm{Res}_z(f) = -2\pi i \sum_{z\in\Delta^-} \mathrm{Res}_z(f).$$

wobei $\Delta^{\pm} := \{ z \text{ ist Nullstelle von } p \text{ mit } \mathrm{Im}(z) \gtrless 0 \}$.

__Beweis:__ Gemäß Residuensatz ist



$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(re^{it})\, i r e^{it}\,dt$$

$$= 2\pi i \sum_{z\in\Delta^+} \mathrm{ind}_{\gamma_r}(z)\cdot \mathrm{Res}_z(f)$$

Wegen

$$\lim_{r\to\infty} \left| \int_0^{\pi} f(re^{it})\, i r e^{it}\,dt \right| \leq \lim_{r\to\infty} \pi \cdot r \cdot \underbrace{\|f\|_{\partial B_r(0)}}_{\leq \frac{C}{r^2} \text{ für } r \text{ groß genug}} = 0$$

ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} 2\pi i \sum_{z\in\Delta^+} \mathrm{ind}_{\gamma_r}(z)\cdot \mathrm{Res}_z(f)$$

$$= 2\pi i \sum_{z\in\Delta^+} \mathrm{Res}_z(f).$$

Für die entsprechende Aussage mit Δ^- schließt man den Weg einfach in der unteren Halbebene. $\boxed{\square}$

<u>Bemerkung:</u> Im obigen Satz existiert wegen $|f(x)| \sim |x|^{-2}$ für $|x| \to \infty$ das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ als uneigentliches Riemann-integral, also

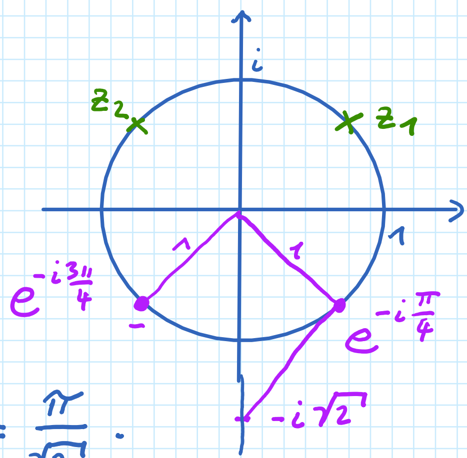
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{0} f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty} \int_{0}^{r} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx.$$

Beachte, dass im Allg. der ganz rechte Limes existieren kann, auch wenn die beiden Limites in der Mitte nicht existieren, z.B. für $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ist $\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 0$ für alle $r > 0$.

<u>Beispiel 10.2</u> Sei $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. Die Nullstellen von $1+z^4$ in der oberen Halbebene sind $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ und die Residuen von f sind

$$\mathrm{Res}_{z_1}(f) = \frac{1}{p'(z_1)} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\mathrm{Res}_{z_2}(f) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

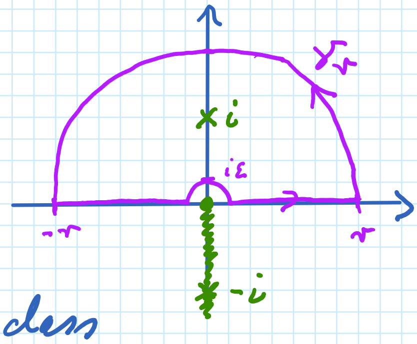


Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{4}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Die Idee aus Satz 10.1. lässt sich leicht verallgemeinern, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 10.3 Wir wollen diesmal $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$ berechnen.
Da die Funktion $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}$ nur auf der geeignet geschlitzten Ebene holomorph ist, müssen wir den Integrationsweg um den Ursprung herumführen. Außerdem verwenden wir, dass bei dieser Wahl des Zweiges der Wurzel für $x > 0$ gilt: $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$, also



$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx = \int_{\infty}^{0} \frac{\sqrt{-x}}{1+x^2}\,(-dx) = i \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx .$$

Den Kreisbogen mit Radius r schätzt man genau wie in 10.1. ab und für den Kreisbogen mit Radius ε ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left| \int_0^\pi f(\varepsilon e^{it})\,\varepsilon\,dt \right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\cdot\pi\cdot \underbrace{\|f\|_{\partial B_\varepsilon(0)}}_{\lesssim 1} = 0 .$$

Also ist

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{1+i} \lim_{r\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{r} f(x)\,dx \right) = \frac{2\pi i}{1+i} \operatorname{Res}_i(f)$$

und mit

$$\operatorname{Res}_i(f) = \lim_{z\to i} (z-i) \frac{\sqrt{z}}{(z+i)\cdot(z-i)} = \frac{\sqrt{i}}{2i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}\cdot 2i}$$

schließlich

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} .$$

Die bisherigen Beispiele hätte man auch durch Auffinden einer Stammfkt. lösen können, was ohne entsprechende Übung aber deutlich schwieriger gewesen wäre. Die folgende für Anwendungen (auch in der Physik!) sehr wichtige Situation erfordert aber die komplexe Methode:

Satz 10.4. Berechnung von Fouriertransformierten

Sei $\Delta = \{z_1, \dots, z_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $f \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta)$. Ferner sei

$$|f(z)| \leqslant \frac{C}{|z|} \quad \text{für } |z| > r_0 .$$

Dann gilt mit $\Delta_+ := \{z \in \Delta \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ und $\Delta_- := \{z \in \Delta \mid \operatorname{Im} z < 0\}$, dass

$$\hat{f}(k) := \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx := \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \sum_{z_j \in \Delta^+} \operatorname{Res}_{z_j}(g) & \text{für } k < 0 \\ -2\pi i \sum_{z_j \in \Delta^-} \operatorname{Res}_{z_j}(g) & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

mit $g(z) := f(z) \cdot e^{-ikz}$. Hier steht P.V. für den Cauchy Hauptwert (principle value) des Integrals, welches unter den gegebenen Voraussetzungen weder als uneigentliches Riemannintegral noch als Lebesgueintegral zu existieren braucht.

Beweis: Sei $k < 0$. Analog zum Beweis von Satz 10.1. ist nur zu zeigen, dass

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_0^{\pi} f(re^{it})\, e^{-ikre^{it}}\, ire^{it}\,dt\right| \le \lim_{r\to\infty} r\int_0^{\pi} |f(re^{it})|\, e^{k\cdot r\sin t}\,dt$$

$$\le C\lim_{r\to\infty}\int_0^{\pi} e^{k\cdot r\sin t}\,dt \le 2C\lim_{r\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^{k\cdot r\frac{2t}{\pi}}\,dt$$

$$= 2C\lim_{r\to\infty}\left[\frac{\pi e^{kr\frac{2t}{\pi}}}{2kr}\right]_0^{\pi/2} = 0.$$

Für $k>0$ schließt man den Integrationsweg in der unteren Halbebene. $\blacksquare$

<u>Beispiel 10.5.</u> Die Fouriertransformierte von $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ist also für $k<0$

$$\hat f(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\,dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}_i\left(\frac{e^{-ikz}}{(z-i)(z+i)}\right) = 2\pi i\,\frac{e^{k}}{2i} = \pi e^{-|k|}$$

Da f reellwertig ist, gilt offenbar $\hat f(-k)=\overline{\hat f(k)}$ und somit ist $\hat f(k)=\pi e^{-|k|}$ für alle $k\in\mathbb{R}$.

Auch Integrale der Form $\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\cdot\cos(t)}\,dt$ mit $a>|b|$ lassen sich leicht in komplexe Wegintegrale umschreiben und mit Hilfe des Residuensatzes berechnen: Sei $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C},\ t\mapsto e^{it}$, also $\gamma=\partial\mathbb{E}$. Dann ist $\gamma'=i\gamma$ und $\cos(t)=\frac{1}{2}(\gamma(t)+\gamma(t)^{-1})$, also

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\cdot\cos(t)}\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b(\gamma(t)+\gamma^{-1}(t))/2}\,\frac{\gamma'(t)}{i\gamma(t)}\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz$$

mit $f(z)=\frac{-2i}{[illegible]}$. Die Nullstellen von $z^2+2\frac{a}{b}z+1$

mit $f(z) = \dfrac{-2i}{2a\cdot z + bz^2 + b}$. Die Nullstellen von $z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1$

sind $z_\pm = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$, wobei nur z_+ in $\mathbb{E}$ liegt.

Also ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(t)}\,dt = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_+}(f) = 2\pi i \cdot \frac{-2i}{2a + b\cdot 2z_+} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Allgemein liefert diese Methode folgenden Satz.

<u>Satz 10.6.</u> Es sei $g(u,v)$ eine rationale Funktion und die Menge P der Pole von $f(z) := z^{-1}\cdot g\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$ erfülle $P \cap \partial\mathbb{E} = \emptyset$. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} g(\cos(t), \sin(t))\,dt = 2\pi \sum_{z \in P \cap \mathbb{E}} \operatorname{Res}_z(f).$$