11. Stunde am 8. Juli

Tuesday, 2 July 2019 11:52

Definition 11.1. Meromorphe Funktionen

Eine Funktion f heißt auf dem Bereich $U \subset \mathbb{C}$ meromorph, wenn f bis auf eventuelle Pole in U holomorph ist. Wir schreiben dann $f \in M(U)$.

Bemerkung 11.2. Da Pole insbesondere isolierte Singularitäten sind, ist für $f \in M(U)$ die Menge P der Polstellen diskret in U und es gilt $f \in H(U \setminus P)$. Da auch $P = \emptyset$ zulässig ist, gilt $H(U) \subset M(U)$.

Man zeigt nun leicht, dass mit $f, g \in M(U)$ auch $f+g, f \cdot g, f' \in M(U)$. Insbesondere ist $M(U)$ eine kommutative $\mathbb{C}$-Algebra.

Ist U ein Gebiet, so ist mit $f \in M(U)$ und $f \not\equiv 0$ auch $\frac{1}{f} \in M(U)$ (man verwende Satz 9.2 um zu zeigen, dass die Nullstellen von f nicht nur diskret in $U \setminus P$ sondern auch diskret in U liegen.)

Für Gebiete $U \subset \mathbb{C}$ ist $M(U)$ also sogar ein Körper.

Für $f \in M(U)$ und $z_0 \in U$ ist der kleinste Index $\nu_f(z_0)$ für den der Koeffizient in der Laurentreihe nicht verschwindet (vgl. Def. 9.1.) immer größer als $-\infty$ und er sagt uns, ob f bei z_0 einen Pol hat ($\nu_f(z_0) < 0$), eine Nullstelle ($\nu_f(z_0) > 0$) oder weder noch.

Da in einer Umgebung von z_0 gilt, dass

$$f(z) = (z - z_0)^{\nu_f(z_0)} \cdot g(z),$$

wobei g um z_0 holomorph ist und $g(z_0) \neq 0$ erfüllt, ist $\nu_f(z_0)$ das Residuum der logarithmischen Ableitung von f,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu_f(z_0) \cdot (z - z_0)^{\nu_f(z_0)-1} \cdot g(z) + (z - z_0)^{\nu_f(z_0)} \cdot g'(z)}{(z - z_0)^{\nu_f(z_0)} \, g(z)}$$

$$= \frac{\nu_f(z_0)}{(z - z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

also $\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = \nu_f(z_0)$. Der Residuensatz liefert sofort die folgende Aussage:

Satz 11.3. Das Argumentprinzip

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und Γ in U nullhomolog. Dann gilt für jede Funktion $f \in M(U)$ mit $f \not\equiv 0$ die auf Γ weder Null- noch Polstellen hat, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{z \in N(f)} \mathrm{ind}_\Gamma(z) \cdot \nu_f(z) - \sum_{z \in P(f)} \mathrm{ind}_\Gamma(z) \cdot (-\nu_f(z)).$$

Ordnung der Nullstelle

Ordnung der Polstelle

Hier bezeichnet $N(f) := \{z \in U \mid f(z) = 0\}$ die Menge der Nullstellen und $P(f) := \{z \in U \mid \nu_f(z) < 0\}$ die Menge der Polstellen von f.

Beispiel 11.4 Sei $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann gibt es ein $r > 0$ so, dass p in $\mathbb{C} \setminus B_r(0)$ keine Nullstellen hat. Die Funktion

$$q(w) := p\left(\frac{1}{w}\right) = a_n w^{-n} + \dots + a_1 w^{-1} + a_0$$

ist meromorph in $\mathbb{C}$ und hat nur bei $w = 0$ einen Pol der Ordnung n. In $\overline{B_{\frac{1}{r}}(0)}$ hat q keine Nullstellen.

Das Argumentprinzip liefert also

$$-n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{1/r}(0)} \frac{q'(w)}{q(w)}\, dw \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = -\sum_{z \in N(p)} \nu_p(z),$$

d.h. die Zahl der Nullstellen von p gewichtet mit ihrer Vielfachheit ist genau n.

In $(*)$ haben wir die Substitutionsregel mit $g(w) = \frac{1}{w}$ also $q = p \circ g$, $q'(w) = (p' \circ g)(w) \cdot g'(w)$ und $g \circ \partial B_{\frac{1}{r}}(0) = -\partial B_r(0)$ verwendet.

Lemma 11.5 Substitution

Sei $f \in H(U)$ und $g \in H(V)$ mit $g(V) \subset U$. Dann gilt für jeden Weg $\gamma : [0,1] \to V$

$$\int_\gamma (f \circ g)(w)\, g'(w)\, dw = \int_{g \circ \gamma} f(z)\, dz.$$

Beweis:

Beweis:

$$\int_\gamma (f\circ g)(w)\,g'(w)\,dw = \int_0^1 \underbrace{(f\circ g)(\gamma(t))}_{f(g\circ\gamma(t))}\,\underbrace{g'(\gamma(t))\gamma'(t)}_{(g\circ\gamma)'(t)}\,dt = \int_{g\circ\gamma} f(z)\,dz .$$ ☒

Korollar 11.6 Sei $g \in H(U)$ und Γ ein Zyklus in U auf dem g keine Nullstellen hat. Dann gilt

$$\mathrm{ind}_{g\circ\Gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz .$$

Beweis: Substitution mit $f(z) = \frac{1}{z}$ liefert

$$\mathrm{ind}_{g\circ\Gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{g\circ\Gamma} \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{g(w)}\,g'(w)\,dw .$$ ☒

Manche Aussagen haben eine einfacher zu merkende Bedeutung, wenn man sie für Zyklen formuliert, die Ränder beschränkter Gebiete sind.

Definition 11.7. Ein Zyklus Γ heißt einfach, wenn ind_Γ nur die Werte 0 und 1 annimmt und $\mathrm{Int}(\Gamma)$ ein Gebiet ist. Er heißt dann Randzyklus des Kompaktums

$$K := \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ext}(\Gamma) = [\Gamma] \cup \mathrm{Int}(\Gamma).$$

Derartige K heißen einfach berandet und man schreibt ∂K für Γ. Ist ein Kompaktum $K \subset U$ einfach berandet, so ist ∂K nullhomolog in U.

Satz 11.8. Satz von Rouché

Es sei $K \subset U$ einfach berandet. Für $f, g \in H(U)$ gelte

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \qquad \text{für } z \in [\partial K].$$

Dann haben f und g in K gleich viele Nullstellen (entsprechend der Vielfachheit gezählt).

Beweis: Die Voraussetzung impliziert insbesondere, dass weder f noch g Nullstellen auf $[\partial K]$ haben kann. Die Aussage folgt also aus dem Argumentprinzip, sobald wir

$$\int_{\partial K} \frac{f'}{f}\, dz = \int_{\partial K} \frac{g'}{g}\, dz$$

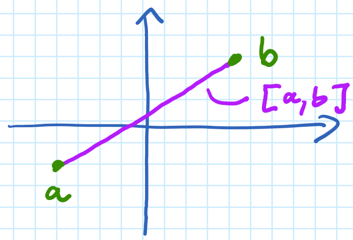
gezeigt haben, bzw. mit Korollar 11.6, dass

$$\operatorname{ind}_{f\circ\partial K}(0) = \operatorname{ind}_{g\circ\partial K}(0).$$

Dies folgt wiederum aus dem Cauchy Integralsatz, falls $f\circ\partial K$ und $g\circ\partial K$ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ homolog sind.

Da $\partial K = \sum_j \gamma_j$, genügt es mit Prop. 8.1. zu zeigen, dass $g\circ\gamma$ und $f\circ\gamma$ für jeden geschlossenen Weg in ∂K homotop sind. Mit $\gamma : [0,1] \to \partial K$ ist

$H(s,t) := (1-s)\cdot f(\gamma(t)) + s\cdot g(\gamma(t))$ eine solche Homotopie in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, da $0 \in [f(\gamma(t)), g(\gamma(t))]$ genau dann, wenn $|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| = |f(\gamma(t))| + |g(\gamma(t))|$.



Beispiel 11.9. Sei $h : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ holomorph in einer Umgebung von $B_1(0)$. Hat h keine Fixpunkte auf $\partial B_1(0)$, so hat h genau einen Fixpunkt in $B_1(0)$.

Dazu wendet man den Satz von Rouché auf $f(z) = h(z) - z$ und $g(z) = -z$ an. Denn für $z \in \partial B_1(0)$ gilt

$$|f(z) - g(z)| = |h(z)| \leq 1 < |h(z) - z| + 1 = |f(z)| + |g(z)|$$

und somit hat $h(z) - z$ so wie $g(z)$ genau eine Nullstelle in $B_1(0)$.

Diese Aussage ist übrigens eine spezielle Situation des Brouwerschen Fixpunktsatzes.