Einfach zusammenhängende Bereiche

Definition 12.1. Nullhomotope Wege und einfach zshg. Bereiche
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich.

- Ein geschlossener Weg γ in U heißt nullhomotop in U, falls er homotop zu einem konstanten Weg $\gamma_0 \equiv z_0 \in U$ ist.
- Es heißt U einfach zusammenhängend, falls jeder geschlossene Weg in U nullhomotop in U ist.

Beispiele 12.2. $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ nicht, da $\partial B_1(0)$ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ nicht nullhomotop ist.

Proposition 12.3. In einem einfach zusammenhängenden Bereich ist jeder Zyklus nullhomolog.

Beweis: Gemäß des Cauchy Integralsatzes (Satz 8.2) reicht es zu zeigen, dass für jedes $f \in H(U)$ und jeden Zyklus Γ in U gilt: $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$. Für jeden geschlossenen Weg γ in U gilt aber mit Proposition 8.1., dass

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_0 \equiv z_0} f(z)\,dz = 0$$

, da das Wegintegral entlang eines konstanten Wegs verschwindet. $\boxtimes$

Satz 12.4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes

Gebiet. Dann gilt:

(i) Für alle $f \in H(U)$ und jeden Zyklus Γ in U ist

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

(ii) Jedes $f \in H(U)$ besitzt eine Stammfunktion $F \in H(U)$.

(iii) Jedes nullstellenfreie $f \in H(U)$ besitzt einen Logarithmus $g \in H(U)$, d.h. g erfüllt $e^g = f$.

(iv) Jedes nullstellenfreie $f \in H(U)$ besitzt eine n-te Wurzel $g \in H(U)$, d.h. g erfüllt $g^n = f$.

<u>Beweis:</u> (i) folgt aus Prop. 12.3. und dem Cauchy Integralsatz, Satz 8.3.

(ii) folgt aus dem entsprechenden Satz aus Stunde 2.

(iii) Da f nullstellenfrei ist, hat $\frac{f'}{f} \in H(U)$ gemäß (ii) eine Stammfunktion $g \in H(U)$, die wir durch Addition einer Konstanten so wählen können, dass $e^{g(z_0)} = f(z_0)$ für ein vorab fixiertes $z_0 \in U$.

Sei nun $h = f \cdot e^{-g} \in H(U)$. Wegen $g' = \frac{f'}{f}$ ist

$$h' = (f' - f g')\,e^{-g} = 0$$

Da U ein Gebiet ist, gilt also $h \equiv h(z_0) = 1$.

(iv) Sei $\tilde{g}$ ein Logarithmus von f, dann erfüllt $g := e^{\frac{1}{n}\cdot\tilde{g}}$ wie gewünscht $g^n = e^{\tilde{g}} = f$. $\blacksquare$

Konforme Abbildungen

Definition 12.5. Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ Bereiche.
Eine holomorphe Bijektion $f: U \to V$ heißt **konforme Abbildung**. Falls eine konforme Abb. $f: U \to V$ existiert, so heißen U und V **konform äquivalent**.

Bemerkung 12.6. Beachte, dass mit Satz 6.2. eine konforme Abbildung automatisch auch biholomorph ist, also auch die Inverse Abbildung holomorph ist.

Beispiele 12.7. (a) Translationen und Drehstreckungen
Die einfachsten konformen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ sind die Translationen

$$z \mapsto z + d \quad \text{für ein } d \in \mathbb{C}$$

und die Drehstreckungen

$$z \mapsto c \cdot z \quad \text{für ein } c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

b) Die Cayley Transformation
Wir bezeichnen die obere Halbebene mit

$$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$$

und die offene Einheitskreisscheibe mit

$$\mathbb{E} := B_1(0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}.$$

Dann ist die Cayley Transformation

$$F: \mathbb{H} \to \mathbb{E}, \quad z \mapsto F(z) := \frac{i - z}{i + z}$$

mit Inverser

$$G : \mathbb{E} \to \mathbb{H}, \quad w \mapsto G(w) := i\,\frac{1-w}{1+w}$$

eine konforme Abbildung (vgl. Aufgabe 5 auf Blatt 2). Somit sind also die Gebiete $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E}$ konform äquivalent.

Das folgende Lemma ist grundlegend für die Charakterisierung der konformen Abbildungen von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{E}$.

<u>Lemma 12.8</u> <u>Schwarz'sches Lemma</u>

Es sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph mit $f(0) = 0$.

Dann gilt

(a) $\quad |f(z)| \leq z \quad$ für alle $z \in \mathbb{E}$

(b) $\quad |f'(0)| \leq 1$

Falls in (a) oder (b) in einem Punkt $z \neq 0$ Gleichheit gilt, so ist f eine Drehung, also $f(z) = c \cdot z$ mit $|c| = 1$.

<u>Beweis:</u> Die Funktion $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ lässt sich mit dem Wert $g(0) = f'(0)$ in die hebbare Singularität bei $z = 0$ fortsetzen. Wegen $f(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ gilt für $|z| \leq r < 1$ nach dem Maximumsprinzip (Korollar 6.4.)

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta| = r} |g(\zeta)| = r^{-1} \max_{|\zeta| = r} |f(\zeta)| < r^{-1}.$$

Für $r \to 1$ ergibt sich $|g(z)| \leq 1$, also (a) und (b).

Gilt nun $|g(z_0)| = 1$ für ein $z_0 \in \mathbb{E}$, so ist g nach dem Maximumsprinzip eine konstante Funktion $g \equiv c$ mit $|c| = 1$. ∎

Definition 12.9 Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich. Eine konforme Abbildung $f: U \to U$ heißt ein *Automorphismus* von U und die Menge der Automorphismen von U wird mit $\mathrm{Aut}(U)$ bezeichnet. Für $f, g \in \mathrm{Aut}(U)$ ist auch $f \circ g \in \mathrm{Aut}(U)$, womit $\mathrm{Aut}(U)$ eine Gruppe mit Einselement $\mathrm{id}: U \to U$, $z \mapsto z$ wird.

Beispiel 12.10. *Automorphismen der Kreisscheibe*

Für $\alpha \in \mathbb{E}$ ist

$$\varphi_\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \quad z \mapsto \varphi_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} \cdot z}$$

in $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ und es gilt

$$\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha, \quad \varphi_\alpha(0) = \alpha, \quad \varphi_\alpha(\alpha) = 0 \quad .$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Der nächste Satz besagt, dass alle Automorphismen der Kreisscheibe bis auf eine zusätzliche Drehung von dieser Form sind.

Satz 12.11 Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. Dann gibt es ein $\theta \in [0, 2\pi)$ und ein $\alpha \in \mathbb{E}$ so, dass

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} \cdot z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Beweis: Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ und setze $\alpha := f^{-1}(0)$. Für $g := f \circ \varphi_\alpha$ gilt also $g(0) = 0$ und $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$.

Für $g := f \circ \varphi_\alpha$ gilt also $g(0) = 0$ und $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. Das Schwarz'sche Lemma für g und g^{-1} liefert dann für $z \in \mathbb{E}$ und $w := g(z)$

$$|z| = |g^{-1}(w)| \leq |w| = |g(z)| \leq |z|,$$

also $|g(z)| = |z|$. Wiederum mit dem Schwarzschen Lemma ist g eine Drehung und somit $f = g \circ \varphi_\alpha^{-1} = g \circ \varphi_\alpha$ von der behaupteten Form. ▨

<u>Korollar 12.12.</u> Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ mit $f(0) = 0$. Dann ist f eine Drehung.

Mit Hilfe der Cayley Transformation können wir nun auch die Automorphismengruppe der oberen Halbebene explizit bestimmen, da

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = F^{-1} \circ \mathrm{Aut}(\mathbb{E}) \circ F .$$

<u>Definition 12.13.</u> Die spezielle lineare Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ ist die Matrixgruppe

$$SL_2(\mathbb{R}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ mit } \det M = ad - bc = 1 \right\}.$$

<u>Satz 12.14.</u> <u>Die Automorphismen der Halbebene</u>

Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. Dann gibt es ein $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ so, dass

$$f(z) = f_M(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } z \in \mathbb{H}.$$

Umgekehrt ist $f_M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ für jedes $M \in SL_2(\mathbb{R})$

und die Abbildung

$$SL_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H}), \quad M \mapsto f_M,$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, also

$$f_M \circ f_N = f_{MN} \quad \text{für alle } M, N \in SL_2(\mathbb{R}).$$

<u>Beweis:</u> Es ist $g := F \circ f \circ F^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ von der Form $g = e^{i\theta}\varphi_\alpha$. Explizites Nachrechnen liefert, dass $f = F^{-1} \circ g \circ F$ von der Form $f = f_M$ ist. Auch die anderen Behauptungen überprüft man durch Nachrechnen. $\boxtimes$