Satz 13.1. Der Riemannsche Abbildungssatz

Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $U \subsetneq \mathbb{C}$ ist konform äquivalent zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$.

Es gilt sogar: Sei $U \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_0 \in U$. Dann gibt es eine eindeutige konforme Abbildung $f: U \to \mathbb{E}$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$.

Bemerkung 13.2. (a) $\mathbb{C}$ ist nicht konform äquivalent zu $\mathbb{E}$. Denn eine konforme Abb. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ wäre beschränkt aber nicht konstant, kann also nach dem Satz von Liouville nicht existieren.

b) Die Eindeutigkeit folgt sofort aus Korollar 12.12. Denn haben f und g die gewünschten Eigenschaften, so ist $f \circ g^{-1}$ eine Drehung, also $f = e^{i\theta} g$. Wegen $f'(z_0) > 0$ und $g'(z_0) > 0$ muss aber $\theta = 0$ gelten.

Beweis: **Schritt 1**: Wir zeigen zunächst, dass es eine konforme Abbildung $F: U \to V \subset \mathbb{E}$ gibt mit $F(z_0) = 0 \in V$. Sei dazu $a \in \mathbb{C} \setminus U$. Dann ist $z \mapsto z - a$ eine holomorphe Funktion die auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet keine Nullstellen hat. Gemäß Satz 12.4. hat sie einen Logarithmus $f \in H(U)$ mit $e^{f(z)} = z - a$. Mit $z - a$ ist auch $\exp\circ f$ injektiv und somit auch f.

Sei nun $z_0 \in U$ fest, dann gibt es ein $r>0$ mit

$$|f(z) - (f(z_0)+2i\pi)| > r \quad \text{für alle } z \in U, \qquad (*)$$

denn sonst wäre $\exp\circ f$ nicht injektiv. [Genauer: Angenommen, $(*)$ gilt nicht. Dann gäbe es eine Folge (z_n) in U mit $f(z_n) \to f(z_0)+2\pi i$, also $z_n - a = \exp(f(z_n)) \to \exp(f(z_0)) = z_0 - a$, und somit aufgrund der Stetigkeit von f auch $f(z_n) \to f(z_0)$ $\lightning$]

Daher können wir die holomorphe Funktion

$$F: U \to \mathbb{E}, \quad z \mapsto F(z) = \frac{r}{2}\,\frac{1}{f(z)-(f(z_0)+2\pi i)} + \frac{r}{2}\,\frac{1}{2\pi i}$$

definieren. Es gilt $F(z_0) = 0$ und F ist mit f auch injektiv. Also ist $F: U \to F(U) \subset \mathbb{E}$ konform.

Schritt 2: Mit Schritt 1 können wir nun annehmen, dass $U \subset \mathbb{E}$. Sei nun

$$\mathcal{F} := \{ g \in H(U) \mid g(U) \subset \mathbb{E},\ g \text{ ist injektiv und } g(0)=0 \}.$$

$\mathcal{F}$ ist nicht leer, da $\mathrm{id} \in \mathcal{F}$. Wegen Korollar 5.3 (Cauchy Abschä.) ist

$$s := \sup_{\in \mathcal{F}} |g'(0)| < \infty.$$

Sei (g_n) eine Folge in $\mathcal{F}$ mit $|g_n'(0)| \to s$. Diese hat nach dem Satz von Montel (siehe unten) eine konvergente Teilfolge, deren Limes g ebenfalls eine holomorphe Funktion auf U mit $g(0)=0$ ist. Mit Hilfe des Satzes von Rouché zeigt man leicht, dass g als lokal gleichmäßiger Limes einer Folge injektiver holomorpher Funktionen entweder injektiv oder konstant ist. Da $s \geq 1$ (wg. $id \in \mathcal{F}$), kann g aber nicht konstant sein, also $g \in \mathcal{F}$. Die Funktion $f = g \cdot \frac{|g'(0)|}{g'(0)}$ erfüllt dann $f \in \mathcal{F}$ und $f'(0) = s$.

Schritt 3: Wir zeigen nun, dass $f: U \to \mathbb{E}$ aus Schritt 2 auch surjektiv ist. Angenommen es gibt ein $\alpha \in \mathbb{E} \setminus f(U)$. Wir führen diese Annahme zum Widerspruch zur Maximalität von $|f'(0)|$ in $\mathcal{F}$, indem wir eine Funktion $F \in \mathcal{F}$ mit $|F'(0)| > |f'(0)|$ konstruieren.

Sei dazu $V := (\varphi_\alpha \circ f)(U)$. Da φ_α die Punkte 0 und α vertauscht, gilt $0 \notin V$ und $\alpha \in V$.

Daher ist V ein einfach zusammenhängendes Gebiet welches die Null nicht enthält und wir können nach Satz 12.4. eine Wurzel $g \in H(V)$ aus id ziehen, also $g^2 = id$.

Sei

$$F := \varphi_{g(\alpha)} \circ g \circ \varphi_\alpha \circ f.$$

Es ist $F \in \mathcal{F}$, da alle Funktionen in der Komposition injektiv sind und ihr Bild in $\mathbb{E}$ haben sowie $F(0) = 0$ gilt.

Sei $h: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, $z \mapsto z^2$, dann ist

$$f = \varphi_\alpha \circ h \circ \varphi_{g(\alpha)} \circ F =: \Phi \circ F.$$

Da $\Phi: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ nicht injektiv ist, kann Φ keine Drehung sein. Mit dem Schwarz'schen Lemma (Lemma 12.8) folgt $|\Phi'(0)| < 1$ und somit

$$|f'(0)| = |\Phi'(0)| \cdot |F'(0)| < |F'(0)|,$$

also der erwünschte Widerspruch. $\boxtimes$

Wir liefern nun noch den Satz von Montel nach.

<u>Definition 13.3.</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und $\mathcal{F} \subset H(U)$ eine Menge von auf U holomorphen Funktionen.

(a) Die Menge $\mathcal{F}$ heißt <u>lokal gleichmäßig beschränkt</u>, falls für jedes Kompaktum $K \subset U$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f|_K\|_\infty := \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in K} |f(z)| < \infty$$

gilt.

(b) Die Menge $\mathcal{F}$ heißt <u>normal</u>, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine lokal-gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. (deren Grenzwert nicht in $\mathcal{F}$ liegen muss, aber gemäß Weierstraß Satz 4.8 in $H(U)$).

<u>Satz 13.4.</u> <u>Satz von Montel</u>

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und $\mathcal{F} \subset H(U)$ lokal-gleichmäßig beschränkt. Dann ist $\mathcal{F}$ normal.

Oder äquivalent: Jede lokal beschränkte Folge (f_n) in $H(U)$ hat eine lokal-gleichmäßig konvergente Teilfolge.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen zunächst mit Hilfe der CIF, dass

Beweis: Wir zeigen zunächst mit Hilfe der CIF, dass $\mathcal{F}$ auf jedem Kompaktum gleichgradig stetig ist (d.h. $\forall z \in K \subset U \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in \mathcal{F}$:
$|z-w| < \delta \Rightarrow |f(z)-f(w)| < \varepsilon$, man kann δ also unabh. von $f \in \mathcal{F}$ wählen.) Dann verwenden wir den Satz von Arzela-Ascoli um die Existenz der lokal-glm. konvergenten Teilfolge zu zeigen.

Sei also $K \subset U$ kompakt und $r > 0$ so, dass $B_{3r}(z) \subset U$ für alle $z \in K$. Seien $z, w \in K$ mit $|z-w| < r$, dann liefert die CIF für $f \in H(U)$

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{2r}(w)} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) d\zeta.$$

Wegen $\left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right| = \frac{|z-w|}{|\zeta - z| \cdot |\zeta - w|} \leq \frac{|z-w|}{r^2}$

folgt für $f \in \mathcal{F}$

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi r}{r^2} \cdot B\,|z-w| =: C\,|z-w|,$$

wobei B die Schranke an die Funktionen $f \in \mathcal{F}$ zum Kompaktum $\hat{K} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(z, K) \leq 2r \}$ sei. Damit haben die Funktionen aus $\mathcal{F}$ auf K eine gemeinsame Lipschitzkonstante und sind somit auch gleichgradig stetig auf K.

Nun verwendet man den

Satz von Arzela-Ascoli

Sei K ein kompakter metrischer Raum. Für eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset C(K)$ des Banachraums $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ sind äquivalent:

(i) $\mathcal{F}$ ist präkompakt, d.h. der Abschluss $\overline{\mathcal{F}}$ von $\mathcal{F}$ ist kompakt.

(ii) $\mathcal{F}$ ist punktweise beschränkt (d.h. für jedes $x \in K$ ist $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt) und gleichgradig stetig.

Mit A.A. gibt es also zu jedem Kompaktum $U \subset K$ eine auf K glm. konvergente Folge in $\mathcal{F}$. Um eine Folge in $\mathcal{F}$ zu konstruieren, die auf jedem Kompaktum in U konvergiert, brauchen wir noch ein weiteres Argument. Sei dazu (K_j) eine Folge von Kompakta $K_j \subset U$ mit $K_j \subset K_{j+1}$ und $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = U$, eine sog. Ausschöpfungsfolge. (Machen Sie sich klar, dass es zu jedem offenen $U \subset \mathbb{C}$ eine solche Ausschöpfungsfolge gibt.) Nun sei $(f_{n,1})$ eine Folge in $\mathcal{F}$ die auf K_1 glm. konvergiert. Aus $(f_{n,1})$ wählen wir eine Teilfolge $(f_{n,2})$ die glm. auf K_2 konvergiert und kommen dann iterativ zu Teilfolgen $(f_{n,j})$ die jeweils glm. auf K_j konvergieren. Die Diagonalfolge $g_n := f_{n,n}$ konvergiert dann glm. auf jedem Kompaktum K_j und somit auch auf jedem Kompaktum $K \subset U$. $\boxtimes$