2. Stunde am 29. April

Wednesday, 17 April 2019 12:09

Wiederholung: Satz über CR-DGL

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich. Es ist $f: U \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph, wenn f reell total differenzierbar in U ist und dort die CR-DGL

$$\bar{\partial} f := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) f = 0$$

erfüllt. In diesem Fall ist

$$f' = \partial_x f = -i \partial_y f.$$

Anwendung von CR:

Erinnerung: Eine offene Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet, wenn sie wegzusammenhängend ist, wenn also zu je zwei Punkten $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ ein stetiger Weg $\gamma: [0,1] \to G$ existiert mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(1) = z_2$.

Satz aus Analysis 2: (Korollar 4.48) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $g: G \to \mathbb{K}^m$ stetig partiell diffbar mit $Dg \equiv 0$. Dann ist g konstant.

Korollar (zu CR-DGL) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(U)$.

- Nimmt f nur reelle oder nur imaginäre Werte an, so ist f konstant.
- Der Realteil bzw. der Imaginärteil bestimmt f eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Beweis: Sei $f \in H(U)$ und $f = u + iv$. Nimmt f nur reelle Werte an, so ist $v \equiv 0$, also $\partial_x v = \partial_y v \equiv 0$. Aufgrund der CR-DGL ist auch $\partial_x u = \partial_y u \equiv 0$. Mit dem obigen Satz folgt, dass u und somit auch

f konstant ist.

Im zweiten Fall sei $g \in H(U)$ mit $\mathrm{Re}(g) = \mathrm{Re}(f) = u$.

Dann nimmt $f - g \in H(U)$ nur imaginäre Werte an und muss daher eine imaginäre Konstante sein. $\boxed{\text{ts}}$

Wegintegrale

Definition: Integrationsweg

Eine stetige und stückweise stetig diffbare Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Integrationsweg. (Im Folgenden kurz Weg). Die Bildmenge

$$[\gamma] := \gamma([a,b]) \subset \mathbb{C}$$

heißt Spur oder Träger und $[a,b] \subset \mathbb{R}$ Parameterintervall des Wegs. Stimmen Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ überein, so heißt der Weg geschlossen.

Definition: Wegintegral

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann definiert

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

das Wegintegral von f über γ.

$$= \sum_{j=0}^{n} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

wobei γ jeweils auf den Teilstücken $[a_j, a_{j+1}]$ diffbar sei.

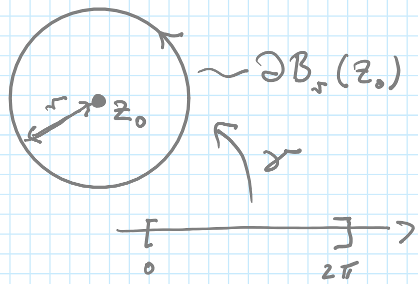
⌈Erinnerung: Für $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist $\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b \mathrm{Re}\, g(t)\,dt + i \int_a^b \mathrm{Im}\, g(t)\,dt$⌋

Beispiele:

Beispiele:

1.) Der geschlossene Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + r e^{it}$$



umläuft die Kreislinie $\partial B_r(z_0)$ einmal im positiven Sinn. Dann ist

$$\int_{\partial B_r(z_0)} f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)\,dz = ir \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{it}\,dt.$$

Beispielsweise ist

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{z}\,dz = ir \int_0^{2\pi} \frac{1}{r e^{it}} e^{it}\,dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

2.) Die orientierte Strecke, die $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ verbindet, wird durch den Weg

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$$

beschrieben und mit $[z_0, z_1]$ bezeichnet.

Es ist $$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz = (z_1 - z_0) \int_0^1 f(z_0 + t(z_1 - z_0))\,dt.$$

<u>Definition:</u> Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $\phi : [c,d] \to [a,b]$ eine stetige, stückweise stetig diffbare Bijektion.
Es heißt dann ϕ eine <u>Reparametrisierung</u> und

$$\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{C}, \quad \tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$$

eine <u>Reparametrisierung des Weges γ</u>.

<u>Proposition:</u> Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [c,d] \to \mathbb{C}$ eine Reparametrisierung. Dann ist auch $\tilde{\gamma}$ ein Integrationsweg und

es gilt für alle stetigen $f: [\gamma] = [\tilde{\gamma}] \to \mathbb{C}$, dass

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \operatorname{sgn}(\phi) \int_{\gamma} f(z)\, dz,$$

wobei $\operatorname{sgn}(\phi) := \operatorname{sgn}(\phi') = 1$ falls $\phi(c) = a$ und

$\operatorname{sgn}(\phi) := -1$ falls $\phi(c) = b$.

Beweis: Kettenregel und Substitutionsregel liefern

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \int_c^d f(\tilde{\gamma}(t))\, \tilde{\gamma}'(t)\, dt =$$

$$= \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))\, \gamma'(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt$$

$$= \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(\gamma(s))\, \gamma'(s)\, ds = \operatorname{sgn}(\phi) \cdot \int_{\gamma} f(z)\, dz. \qquad \boxed{\text{q.e.d.}}$$

Man kann das Parameterintervall eines Weges also stets durch Reparametrisierung auf eine gewünschte Form bringen, ohne das Wegintegral zu verändern.

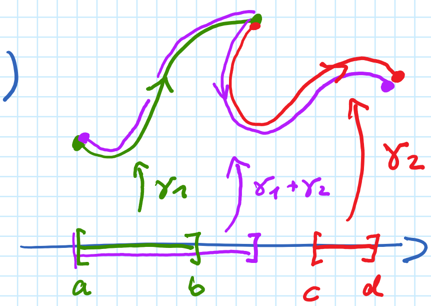
Definition Seien $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Dann heißt

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 : [a, b+(d-c)] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{falls } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t-b+c) & \text{falls } t \in [b, b+(d-c)] \end{cases}$$

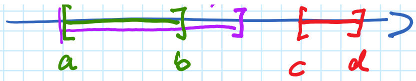
der Summenweg und

$$-\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad -\gamma_1(t) := \gamma_1(a+b-t)$$

der Umkehrweg von γ_1.



Lemma: Standardabschätzung



Lemma: Standardabschätzung

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ stetig.
Dann gilt

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq \|f\|_\gamma \cdot L(\gamma),$$

wobei $\|f\|_\gamma := \max_{z \in [\gamma]} |f(z)|$ und

$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$ die Länge von γ ist.

Beweis:
$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt$$

$$\leq \|f\|_\gamma \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \|f\|_\gamma \cdot L(\gamma). \quad \boxtimes$$

Stammfunktionen

Hat $f : U \to \mathbb{C}$ eine Stammfkt $F \in H(U)$, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\, dt =$$

$$\underset{\text{Hauptsatz}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Das Wegintegral über eine Fkt. mit Stammfkt hängt also nur von den Endpunkten des Weges ab! Für geschlossene Wege ergibt sich insbesondere

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Beispiel: $f_n : U_n \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$

mit $U_n = \mathbb{C}$ falls $n \geq 0$ und $U_n = \mathbb{C}^{\times} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ falls $n < 0$.

Für $n \neq -1$ hat f_n die Stammfkt. $F_n(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$.

Also gilt für jeden geschlossenen Weg γ in U_n

$$\int_\gamma z^n \, dz = 0 \qquad (n \neq -1).$$

Da wir bereits gesehen haben, dass

$$\int_{\partial B_r(0)} z^{-1} \, dz = 2\pi i \neq 0$$

ist, kann $f_{-1} = \frac{1}{z}$ in $\mathbb{C}^{\times}$ keine Stammfkt besitzen.

<u>Satz</u>: Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig.

Dann sind äquivalent:

(i) f besitzt eine holomorphe Stammfunktion

(ii) für jeden geschlossenen Weg γ in U gilt

$$\int_\gamma f(z) \, dz = 0.$$

Ist (ii) erfüllt, so liefert

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) \, d\zeta \qquad (*)$$

eine Stammfkt von f, wobei γ_z ein Weg in U sei, der ein festes $z_* \in U$ mit z verbindet.

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) wurde am Beginn des Abschnitts gezeigt.

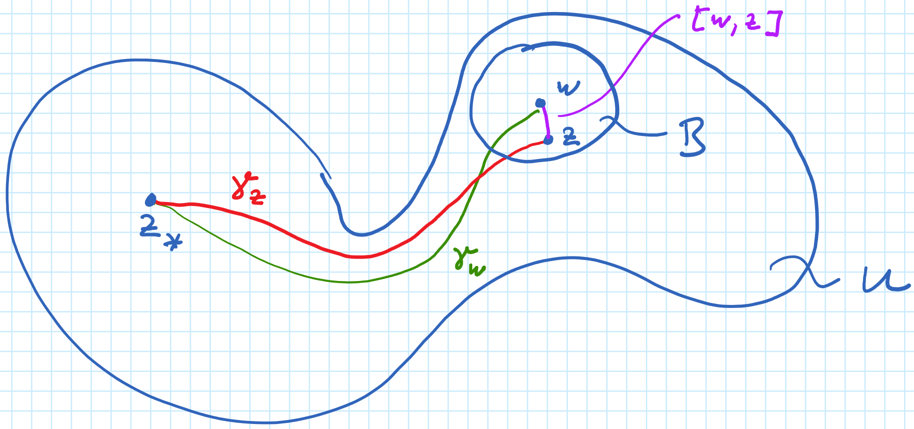
Für (ii) $\Rightarrow$ (i) stellen wir zunächst fest, dass aufgrund der Annahme in (ii) die in $(*)$ definierte Fkt. F nicht von der Wahl von γ_z

abhängt. Denn sei $\tilde{\gamma}_z$ ein weiterer Weg in U von z_* nach z, so ist $\gamma_z - \tilde{\gamma}_z$ ein geschlossener Weg in U und daher

$$0 = \int_{\gamma_z - \tilde{\gamma}_z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta)\,d\zeta .$$

Sei nun $w \in U$ beliebig. Dann bleibt $F'(w) = f(w)$ zu zeigen. Dazu wählen wir $B := B_r(w) \subset U$ und erhalten für $z \in B$, indem wir (ii) auf den geschlossenen Weg $-\gamma_z + \gamma_w + [w,z]$ anwenden,

$$F(z) = F(w) + \int_{[w,z]} f(\zeta)\,d\zeta .$$



Somit ist für $z \neq w$ (siehe auch Bsp. 2. oben)

$$\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(w) = \frac{1}{z-w}\int_{[w,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{f(w)}{z-w}\int_{[w,z]} d\zeta$$

$$= \frac{1}{z-w}\int_{[w,z]} \big(f(\zeta)-f(w)\big)\,d\zeta .$$

Die Standardabschätzung liefert schließlich die Behauptung:

$$\left|\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(w)\right| \leq \underbrace{\frac{L([w,z])}{|z-w|}}_{=1} \cdot \max_{\zeta\in[w,z]} |f(\zeta)-f(w)| \xrightarrow{z\to w} 0 \qquad \boxed{}$$

da f stetig ist