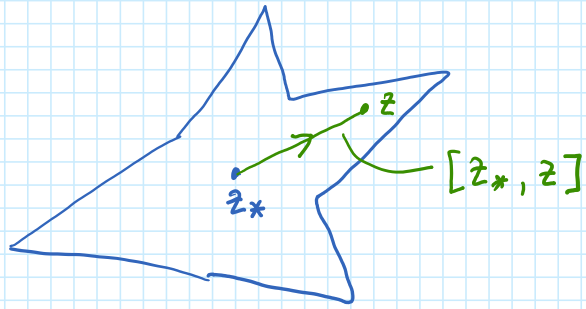
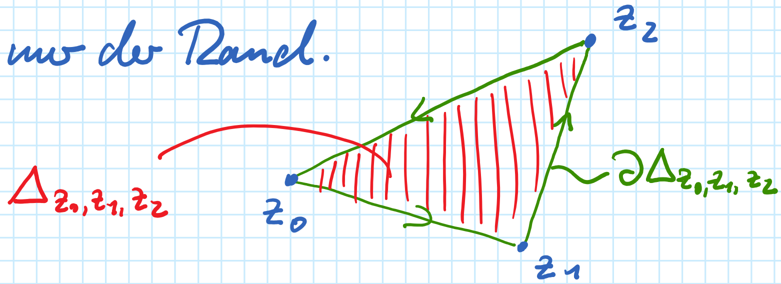
Definition Ein Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ heißt <u>sternförmig</u> bzw. <u>Sterngebiet</u> bezüglich des <u>Zentrums</u> $z_* \in U$, falls $[z_*, z] \subset U$ für alle $z \in U$.



Definition Für drei Punkte $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sei

$$\partial\Delta_{z_0,z_1,z_2} := [z_0, z_1] + [z_1, z_2] + [z_2, z_3]$$

der geschlossene Weg entlang des Randes des von z_0, z_1, z_2 gebildeten Dreiecks Δ_{z_0,z_1,z_2}. Als Menge sei $\Delta_{z_0,z_1,z_2} \subset \mathbb{C}$ im Folgenden immer das ausgefüllte abgeschlossene Dreieck, also nicht nur der Rand.



Satz Es sei U ein Sterngebiet und $f: U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:

(i) f besitzt eine holomorphe Stammfkt.

(ii) Für jedes Dreieck $\Delta_{z_0,z_1,z_2} \subset U$ gilt

$$\int_{\partial\Delta_{z_0,z_1,z_2}} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Wie der vorausgegangene Satz, nur dass jetzt $\gamma_z = [z_*, z]$ gewählt werden kann. Dann ist der Weg $-\gamma_z + \gamma_w + [w,z] = \partial\Delta_{z,z_*,w}$, welcher für z nahe genug bei w auch ganz in U liegt. ■

Wir werden zeigen, dass zumindest lokal eine Fkt. f genau dann eine Stammfkt. besitzt, wenn sie holomorph ist. Die eine Richtung dieser Äquivalenz ergibt sich aus folgendem Lemma.

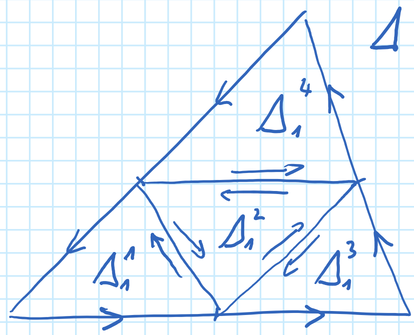
Lemma von Goursat und Pringsheim

Es sei $f \in H(U)$. Dann gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset U$, dass

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Unterteile Δ wie skizziert in vier kongruente Teildreiecke.

Dann ist



$$J := \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^j} f(z)\,dz,$$

da sich die Beiträge der jeweils einmal in jeder Richtung durchlaufenen Wege gegenseitig aufheben.

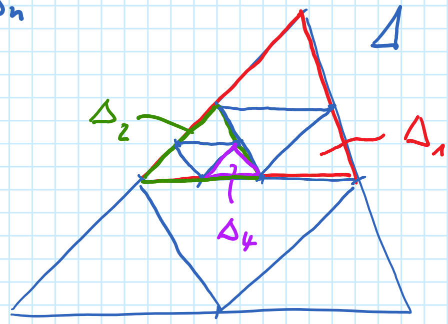
Sei Δ_1 dasjenige Teildreieck, für welches $\left|\int_{\partial\Delta_1^j} f(z)\,dz\right|$ am größten ist. Dann ist am größten ist. Dann ist

$$|\mathcal{J}| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz \right| .$$

Weiterhin ist $L(\partial\Delta_1) = 2^{-1} \cdot \ell$ wenn $\ell := L(\partial\Delta)$.

Nun zerlegt man Δ_1 wieder in Teildreiecke, sucht dasjenige mit dem größten Beitrag zum Wegintegral aus, zerlegt es, usw. So erhält man eine Folge von Dreiecken $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ mit $L(\partial\Delta_n) = 2^{-n} \cdot \ell$ und

$$|\mathcal{J}| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| , \quad n = 1,2,3,\dots$$



Aufgrund des Schachtelungsprinzips (Proposition 3.12 aus Analysis 2) gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \{w\}$. Da f bei $w \in \Delta \subset U$ komplex diffbar ist, gilt

$$f(z) = f(w) + f'(w)(z-w) + (z-w) \cdot \varrho(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \to w} \varrho(z) = 0.$$

Da das Polynom $f(w) + f'(w) \cdot (z-w)$ die Stammfunktion $f(w) \cdot z + f'(w) \frac{(z-w)^2}{2}$ hat, gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} (z-w) \cdot \varrho(z)\,dz \right|$$

$\partial\Delta_n \qquad\qquad \partial\Delta_n$

$$\le \max_{z\in\partial\Delta_n}|z-w| \cdot \max_{z\in\partial\Delta_n}|\varrho(z)| \cdot L(\partial\Delta_n)$$

$$\le L(\partial\Delta_n)^2 \cdot \max_{z\in\partial\Delta_n}|\varrho(z)| \quad .$$

Insgesamt ist also

$$|y| \le 4^n \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \le 4^n \cdot 4^{-n} \cdot \ell^2 \cdot \max_{z\in\partial\Delta_n}|\varrho(z)|$$

$$= \ell^2 \max_{z\in\partial\Delta_n}|\varrho(z)| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \boxtimes$$

Dieses Lemma und der vorausgehende Satz liefern die erste Version des Cauchy'schen Integralsatzes.

Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein bezüglich $z_* \in U$ sternförmiges Gebiet und $f \in H(U)$. Dann ist

$$F(z) := \int_{[z_*,z]} f(\zeta)\,d\zeta \quad , \; z \in U,$$

eine Stammfkt. von f, und es gilt für jeden geschlossenen Weg γ in U, dass

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \; .$$

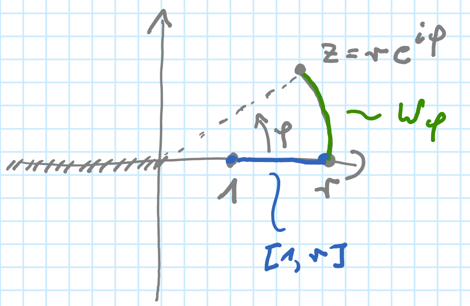
Bemerkung: Für allgemeine Bereiche $U \subset \mathbb{C}$ gilt zumindest, dass holomorphe Funktionen lokal integrabel sind: Sei $f \in H(U)$ und $w \in U$. Dann hat f auf jeder sternförmigen Umgebung $U_w \subset U$ von w (z.B. $U_w = B_r(w)$ für r klein genug) eine Stammfkt. $F: U_w \to \mathbb{C}$.

<u>Beispiel:</u> $f: \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$, hat wg.

$$\int_{\partial B_1(0)} f(z)\, dz = 2\pi i \neq 0 \quad \text{keine Stammfkt.}$$

Schränkt man f auf das Sterngebiet $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit Zentrum $z_* = 1$ ein, so ist die Stammfkt.

$$F(z) = \int_{[z_*, z]} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta = \int_{[1,r]} \frac{1}{\zeta} d\zeta + \int_{w_\varphi} \frac{1}{\zeta} d\zeta =$$



$$= \int_1^r \frac{1}{x}\, dx + \int_0^\varphi \frac{i r e^{i\theta}}{r e^{i\theta}}\, d\theta =$$

$$= \ln r + i\varphi = \operatorname{Ln}(z)$$

also gleich dem Hauptzweig des Logarithmus.

Ketten, Zyklen und Zerlegungen

<u>Definition:</u> Eine <u>Kette</u> von Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ ist eine endliche Linearkombination

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{r} n_j \gamma_j \quad \text{mit } n_j \in \mathbb{Z}.$$

Die Summenschreibweise ist rein symbolisch zu verstehen und durch folgende Definition motiviert:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := \sum_{j=1}^{k} n_j \int_{\gamma_j} f(z)\,dz \quad \text{für } f:[\Gamma]\to\mathbb{C} \text{ stetig.}$$

Es heißt $[\Gamma] := \bigcup_{j=1}^{k} [\gamma_j]$ wieder Spur von Γ und $L(\Gamma) := \sum |n_j|\, L(\gamma_j)$ die Länge von Γ.

Man addiert Ketten, indem man die Koeffizienten addiert:

$\Gamma_1 = \gamma_1 + 3\gamma_2 - \gamma_3$, $\Gamma_2 = -\gamma_2 + 2\gamma_3 + 5\gamma_4$

$\Rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2 = \gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 + 5\gamma_4$.

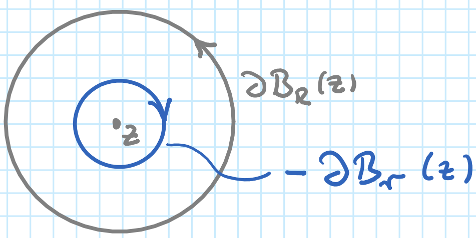
Man identifiziert zwei Ketten Γ_1 und Γ_2, falls

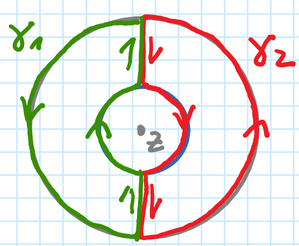
$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \text{ für alle stetigen } f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},$$

und schreibt dann auch $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Lässt sich eine Kette als Summe geschlossener Wege schreiben, so nennt man sie <u>Zyklus</u>.

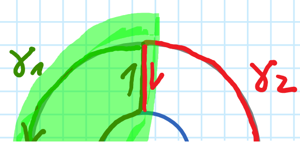
<u>Bsp.:</u> Die Kette $\Gamma := \partial B_R(z) - \partial B_r(z)$ ist ein Zyklus, lässt sich aber auch auf andere Weise in geschlossene Wege zerlegen:

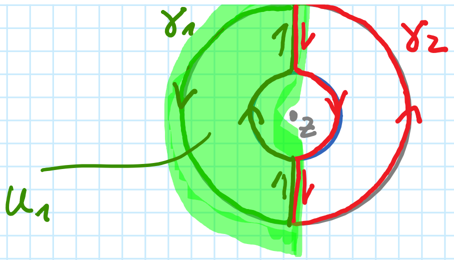




$\Gamma = \partial B_R - \partial B_r$
$= \gamma_1 + \gamma_2$

Der Vorteil der Zerlegung $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ist, dass die γ_j in sternförmigen Gebieten $U_j \in \mathbb{C}\setminus\{z\}$ liegen:





Satz: Cauchy'scher Integralsatz für zerlegbare Zyklen

Es sei $f \in H(U)$. Ist der Zyklus Γ in geschlossene Wege γ_j zerlegbar, von denen jeder in einem Sterngebiet $U_j \subset U$ liegt (d.h. $[\gamma_j] \subset U_j$), so gilt

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0 .$$