4. Stunde am 13. Mai

Monday, 6 May 2019 15:56

Satz 4.1: Cauchy'scher Integralsatz für zerlegbare Zyklen

Es sei $f \in H(U)$. Ist der Zyklus Γ in geschlossene Wege γ_j zerlegbar, von denen jeder in einem Sterngebiet $U_j \subset U$ liegt (d.h. $[\gamma_j] \subset U_j$), so gilt

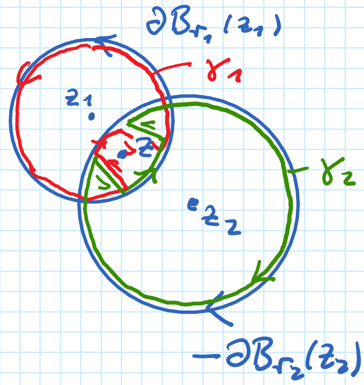
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Sei $\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j$ mit $[\gamma_j] \subset U_j \subset U$ und U_j sternförmig. Dann ist mit dem Satz von Cauchy für Sterngebiete

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = 0$$

$\blacksquare$

Korollar 4.2: Sei $z \in \mathbb{C}$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $r_1, r_2 > 0$ so, dass $|z - z_1| < r_1$ und $|z - z_2| < r_2$.
Sei weiterhin $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich so, dass $B_{r_1}(z_1) \subset U$ und $B_{r_2}(z_2) \subset U$.
Dann gilt für jedes $f \in H(U \setminus \{z\})$, dass



$$\int_{\partial B_{r_1}(z_1)} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\partial B_{r_2}(z_2)} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Beweis: Es lässt sich $\Gamma = \partial B_{r_1}(z_1) - \partial B_{r_2}(z_2)$ wie im Bild in $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ zerlegen, wobei γ_1 und γ_2 jeweils in sternförmigen $U_j \subset U \setminus \{z\}$ liegen. Damit gilt

$$\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_2} f(\zeta)\,d\zeta = 0$$

$\blacksquare$

Korollar 4.3: Es sei $f \in H(U \setminus \{z\})$ für ein $z \in U$. Ist f um z beschränkt, so gilt für jede Kreisscheibe B mit $z \in B$ und $\overline{B} \subset U$, dass

$$\int_{\partial B} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Beweis: Gemäß dem vorangegangenen Korollar ist

$$\int_{\partial B} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial B_\varrho(z)} f(\zeta)\, d\zeta \quad \text{für jedes } \varrho > 0 \text{ mit } B_\varrho(z) \subset U.$$

Mit der Standardabschätzung folgt aber sofort

$$\left| \int_{\partial B_\varrho(z)} f(\zeta)\, d\zeta \right| \leq \max_{\zeta \in B_\varrho(z)} |f(\zeta)| \cdot 2\pi\varrho \leq C \cdot 2\pi\varrho \xrightarrow{\varrho \to 0} 0$$

$\blacksquare$

Satz 4.4: Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben

Es sei B eine offene Kreisscheibe mit $\overline{B} \subset U$. Dann gilt für alle $f \in H(U)$ und $z \in B$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Beweis: Für festes $z \in B$ sei

$$g(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{falls } \zeta \in U \setminus \{z\} \\ f'(\zeta), & \text{falls } \zeta = z \end{cases}$$

Es ist g holomorph in $U \setminus \{z\}$ und stetig in U und daher beschränkt um z. Nach Korollar 4.3. gilt dann

$$0 = \int_{\partial B} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z).$$

$\blacksquare$

Korollar 4.5: Cauchy'sche Integralformel für Ableitungen

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und $f \in H(U)$. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar und für jede offene Kreisscheibe B mit $\overline{B} \subset U$ und jedes $z \in B$ gilt

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta . \qquad (*)$$

Beweis: Sei $B \subset U$ und $z \in B$ gegeben. (Zu jedem $z \in U$ gibt es ein passendes B!). Da der Differenzenquotient

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{(\zeta - z)^n} = \lim_{w \to z} \frac{1}{w - z} \left(\frac{1}{(\zeta - w)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right) = \frac{n}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

für ζ in dem Kompaktum ∂B gleichmäßig konvergiert, kann man die Differentiation und die Integration in der Cauchy Integralformel vertauschen,

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta ,$$

also die Formel $(*)$ für $n = 1$. Der Rest folgt per Induktion. ∎

Korollar 4.6 Für Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ gilt also:

$$f \text{ ist holomorph} \iff f \text{ ist lokal integrabel}$$

Beweis: $\Rightarrow$: Cauchy'scher Integralsatz

$\Leftarrow$: Ist $f = F'$, so ist nach 4.5 auch f holomorph ∎

Man kann die Cauchy'sche Integralformel auch zur Berechnung von Integralen verwenden: z.B. ist

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{\sin(\zeta)}{\zeta - \frac{\pi}{2}}\, d\zeta = 2\pi i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i,$$

da $\frac{\pi}{2} \in B_2(0)$.

Definition 4.7. Eine Funktionenfolge $f_n : U \to \mathbb{C}$ heißt <u>lokal-gleichmäßig konvergent</u> auf dem Bereich U, falls jedes $z_0 \in U$ eine Umgebung besitzt, auf der die Folge (f_n) gleichmäßig konvergiert.

Satz 4.8 (Weierstraß'scher Konvergenzsatz)

Die Folge $f_n \in H(U)$ konvergiere lokal-glm. gegen $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist $f \in H(U)$ und die Folge f_n' der Ableitungen konvergiert lokal glm. gegen f'.

<u>Beweis:</u> Da die behaupteten Aussagen alle lokal sind, können wir uns auf Kreisscheiben $B = B_r(z_0)$ in U mit $\overline{B} \subset U$ einschränken. Die lokal-glm. Konvergenz impliziert sowohl die Stetigkeit von f als auch die Vertauschbarkeit von Limes und Integral in

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\, dz \underset{f_n \in H(U)}{=} 0 \qquad \forall \Delta \subset B.$$

Also ist f lokal integrabel und somit holomorph.

Es ist für $z \in B_{r/2}(z_0)$

$$|f_k'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{|f_k(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} d\zeta \leq$$

$$\leq \frac{2\pi r \cdot 4}{2\pi r^2} \|f_k - f\|_{\partial B} \xrightarrow{k \to \infty} 0 \quad \boxed{}$$

Potenzreihen

Satz 4.9 (Wiederholung aus Analysis 1, Satz 5.24)

Sei (c_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} .$$

(i) Für jedes $r < R$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ absolut und gleichmäßig für $z \in \overline{B_r(z_0)}$.

(ii) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$ divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Die Zahl R heißt Konvergenzradius und $B_R(z_0)$ Konvergenzgebiet der Potenzreihe $\sum c_n (z - z_0)^n$.

Beweis: (i) Sei $|z - z_0| \leq r < R$, dann ist $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z - z_0| \leq \frac{r}{R} < 1$. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und ein $\frac{r}{R} < q < 1$ so, dass $\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z - z_0| \leq q$ für alle $n \geq n_0$. Somit ist $|c_n| |z - z_0|^n \leq q^n$ und $\sum |c_n| |z - z_0|^n$ wird durch die geometrische Reihe $\sum q^n = \frac{1}{\ldots}$ majorisiert [illegible] wird durch die geometrische Reihe

$\sum q^n = \frac{1}{1-q}$ majorisiert.

(ii) Siehe Ana 1. $\boxtimes$