Potenzreihen

Satz 4.9 (Wiederholung aus Analysis 1, Satz 5.24)

Sei (c_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

(i) Für jedes $r < R$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ absolut und gleichmäßig für $z \in \overline{B_r(z_0)}$.

(ii) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > R$ divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.

Die Zahl R heißt Konvergenzradius und $B_R(z_0)$ Konvergenzgebiet der Potenzreihe $\sum c_n (z-z_0)^n$.

Beweis: (i) Sei $|z-z_0| \leq r < R$, dann ist

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z-z_0| \leq \frac{r}{R} < 1$. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$

und ein $\frac{r}{R} < q < 1$ so, dass $\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z-z_0| \leq q$ für alle $n \geq n_0$. Somit ist $|c_n||z-z_0|^n \leq q^n$ und $\sum |c_n||z-z_0|^n$ wird durch die geometrische Reihe $\sum q^n = \frac{1}{1-q}$ majorisiert.

(ii) Siehe Ana 1. $\square$

Satz 5.1 Potenzreihen definieren holomorphe Funktionen

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

∞

Dann ist $f(z) := \sum_{n=0} c_n (z-z_0)^n$ eine auf $B_R(z_0)$ holomorphe Funktion und es gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{sowie} \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (z-z_0)^{n-1}$$

Es ist also $\sum c_n (z-z_0)^n$ die Taylorreihe von f in z_0.

<u>Beweis</u> Gemäß Satz 4.9. konvergiert die Partialsummenfolge $S_N(z) := \sum_{n=0}^{N} c_n (z-z_0)^n$ lokal glm. auf $B_R(z_0)$. Da die S_N als Polynome offenbar holomorph sind, ist die Grenzfkt f gemäß Satz 4.8 ebenfalls holomorph und es gilt

$$\lim_{N \to \infty} S_N'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (z-z_0)^{n-1} = f'(z).$$ Insbesondere ist $f'(z_0) = c_1$ und wiederholte Anwendung liefert

$f^{(n)}(z_0) = n!\, c_n$. $\boxtimes$

<u>Satz 5.2.</u> <u>Holomorphe Fkt. haben konvergente Taylorreihen</u>

Sei $f \in H(U)$ und $B_R(z_0) \subset U$. Dann ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$ mindestens R und es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \quad \text{für } z \in B_R(z_0).$$

<u>Beweis:</u> Sei O.B.d.A $z_0 = 0$. Sei $z \in B_R(0)$ fest, also $|z| < r < R$ für ein geeignetes r. Für alle $\zeta \in \partial B_r(0)$ gilt dann $\left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$ und somit

$$\frac{1}{} = \frac{1}{} \left(\frac{1}{} \right) = \frac{1}{} \sum^{\infty} \left(\frac{z}{} \right)^n$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\right) = \frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n,$$

wobei die Reihe glm. für $\zeta \in \partial B_r(0)$ konvergiert.
Also kann man in der folgenden Rechnung Summation und Integration vertauschen.

Die Cauchy'schen Integralformeln (Satz 4.4 und Korollar 4.5) liefern dann

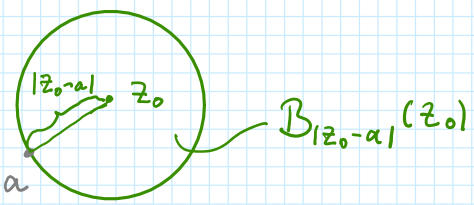
$$f(z) \overset{4.4}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta}_{\overset{4.5}{=} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}\; z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n.$$

Zusammengenommen gilt also, dass eine Fkt. genau dann holomorph ist, wenn sie sich lokal als konvergente Potenzreihe darstellen lässt.

Bsp.: Die holomorphe Fkt. $f: \mathbb{C}\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z-a}$ hat bei $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{a\}$ die auf $B_{|z_0-a|}(z_0)$ konvergente Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z_0-a)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$



Korollar 5.3. **Cauchy Abschätzungen**

Es sei B eine offene Kreisscheibe vom Radius r, und f sei holomorph in einer Umgebung von $\overline{B}$. Dann gilt für alle $z \in B$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$|f^{(n)}(z)| \leq n! \cdot \frac{r \cdot \|f\|_{\partial B}}{\operatorname{dist}(z, \partial B)^{n+1}}$$

Beweis: Die Standardabschätzung liefert

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{\|f\|_{\partial B}}{\|(\cdot - z)^{n+1}\|_{\partial B}} \cdot 2\pi r$$

$\boxtimes$

Korollar 5.4.: **Satz von Liouville**

Für gegebenes $f \in H(\mathbb{C})$ und ein $m \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$f(z) = \mathcal{O}(|z|^m) \quad \text{für } z \to \infty.$$

Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq m$.

Insbesondere ($m = 0$) sind beschränkte auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen konstant.

Beweis: Wir entwickeln f in die auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Taylorreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Für $n > m$ liefern die Cauchy Abschätzungen auf $B_r(0)$

$$|a_n| = \frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)| \leq \frac{r \cdot \|f\|_{\partial B_r}}{r^{n+1}} \leq r^{m-n} \xrightarrow{r \to \infty} 0.$$

Also ist $a_n = 0$ für $n > m$. $\boxtimes$

Korollar 5.5. **Fundamentalsatz der Algebra**

Jedes nichtkonstante Polynom besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

__Beweis:__ Angenommen es gebe ein Polynom p vom Grad $n \geq 1$ ohne Nullstellen in $\mathbb{C}$. Dann ist $f = \frac{1}{p}$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion und ist wegen

$$f(z) = p(z)^{-1} = \mathcal{O}(|z|^{-n}) \quad \text{für } z \to \infty$$

beschränkt, im Widerspruch zum Satz von Liouville. $\boxtimes$

Mit Hilfe der Taylorentwicklung können wir leicht zeigen, dass sich Nullstellen holomorpher Funktionen im Holomorphiegebiet nicht häufen können und eine wohldefinierte Ordnung haben.

__Definition 5.6.__ Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich. Eine Teilmenge $M \subset U$ heißt __diskret in U__, falls M keinen Häufungspunkt in U besitzt.

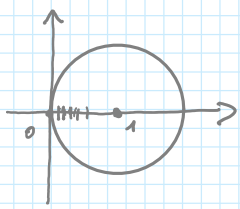
Jeder Punkt $m \in M$ einer in U diskreten Menge hat also eine offene Umgebung $U_m \subset U$ die keinen weiteren Punkt aus M enthält.

Außerdem sind solche Mengen

a) lokal endlich, d.h. jedes Kompaktum $K \subset U$ enthält höchstens endlich viele Elemente aus M.

b) höchstens abzählbar (als Konsequenz von a))

__Bsp.:__
- Jede endliche Teilmenge eines Bereichs ist diskret.
- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset B_1(1)$ ist diskret.



Diskrete Mengen können sich also am Rand von U häufen.

__Satz 5.7. zu Nullstellen holomorpher Funktionen__

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(U)$ sei nicht konstant gleich Null, $f \not\equiv 0$.

a) Für jede Nullstelle $w \in f^{-1}(\{0\})$ gibt es ein eindeutiges $m = m(w) \in \mathbb{N}$, und eine holomorphe Funktion $g \in H(U)$ mit $g(w) \neq 0$, so dass

$$f(z) = (z-w)^m g(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

Die Zahl $m(w)$ heißt <u>Ordnung</u> der Nullstelle.
In einer hinreichend kleinen Umgebung $B_r(w) \subset U$ gilt sogar

$$f(z) = h(z)^m$$

für eine auf $B_r(w)$ holomorphe Funktion h mit $h'(w) \neq 0$.

b) Es hat f bei $w \in U$ genau dann eine Nullstelle m-ter Ordnung, wenn

$$f(w) = f'(w) = \cdots = f^{(m-1)}(w) = 0 \quad \text{aber } f^{(m)}(w) \neq 0.$$

c) Die Nullstellenmenge $f^{-1}(\{0\})$ ist diskret in U.

<u>Beweis:</u> a) Auf einer hinreichend kleinen Kreisscheibe $B_r(w)$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z-w)^n .$$

Dann ist $m := \min\{ n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(w) \neq \}$ wohldefiniert, da $f^{(n)}(w)$ nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ Null sein kann. Um das zu zeigen, sei $S := \{ z \in U \mid f^{(n)}(z) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \}$. Die Menge S ist einerseits abgeschlossen, da die Funktionen $f^{(n)}$ alle stetig sind. Andererseits ist S auch offen, da nach Satz 4.11 für jedes $z \in S$ eine Kreisscheibe um z existiert, auf der f identisch verschwindet. Somit ist $S \subset U$ offen und abgeschlossen,

also, da U zusammenhängend ist, entweder $S = \emptyset$ oder $S = U$.
(vgl. dazu Definition 3.16 und Proposition 3.20 aus Analysis 2).

Da $f \not\equiv 0$ vorausgesetzt war, gilt $S = \emptyset$.

Also ist

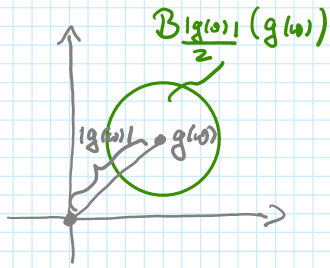
$$f(z) = (z - z_0)^m \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z - z_0)^{n-m}}_{=:\, g(z)} \quad \text{auf } B_r(w),$$

wobei $g \in H(B_r(w))$ und $g(w) = \frac{f^{(m)}(w)}{m!} \neq 0$. Außerhalb von $B_r(w)$ setzen wir g durch

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-w)^m}$$

zu einer auf ganz U holomorphen Funktion fort.

Da $g(w) \neq 0$ und da g insbesondere stetig ist, existiert eine Kreisscheibe $B_\delta(w) \subset U$ so, dass
$g(B_\delta(w)) \subset B_{\frac{|g(w)|}{2}}(g(w))$.



Auf $B_\delta(w)$ ist

$$h(z) := (z-w) \cdot e^{\frac{1}{m} \ln(g(z))}$$

für einen geeigneten Zweig des Logarithmus eine holomorphe Funktion und erfüllt

$$h(z)^m = (z-w)^m \, e^{\ln(g(z))} = (z-w)^m g(z) = f(z).$$

b) folgt sofort aus dem Beweis von a)

c) Aus a) folgt, dass jede Nullstelle w von f eine Umgebung besitzt, in der keine weitere Nullstelle liegt. Denn $g(z) \neq 0$

auf einer Umgebung von w und $(z-w)^m$ hat w als einzige Nullstelle. Damit kann die Nullstellenmenge $f^{-1}(\{0\})$ aber keinen Häufungspunkt in U haben, da der ja aufgrund der Stetigkeit von f selbst eine Nullstelle wäre, aber keine Umgebung ohne weitere Nullstellen besäße. $\boxtimes$