6. Stunde am 27. Mai

Tuesday, 14 May 2019 15:39

Korollar 6.1.: Identitätssatz

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g \in H(U)$. Falls $f(z) = g(z)$ für alle z aus einer Menge mit Häufungspunkt in U gilt, so ist $f = g$.

Beweis: Die Funktion $f - g \in H(U)$ ist Null auf einer Menge mit Häufungspunkt und somit nach Satz 5.7. identisch gleich Null ☒

Eine holomorphe Funktion ist also durch ihre Werte auf einer „sehr kleinen" Teilmenge vollständig festgelegt. Daher besitzen reelle Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ auch höchstens eine holomorphe Fortsetzung in ein Gebiet $[a,b] \subset U \subset \mathbb{C}$. Wir hatten bei den holomorphen Fortsetzungen von exp, sin, cos nach $\mathbb{C}$ und von Ln nach $\mathbb{C}^-$ keinerlei Freiheit.

Das Permanenzprinzip

„Rechenregeln", die sich auf einem Gebiet U als Identitäten holomorpher Funktionen ausdrücken lassen, brauchen also nur auf einer Teilmenge $M \subset U$ mit Häufungspunkt in U überprüft zu werden, um auf ganz U zu gelten; „sie setzen sich von M nach U fort".

Beispiele:

- Ist $f \in H(\mathbb{C})$ auf der reellen Achse periodisch, also $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein

$p \in \mathbb{R}$, so gilt schon $f(z+p) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Es ist also z.B. $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

- Da der reelle Logarithmus $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in (0,\infty)$ erfüllt, gilt für die eindeutige holomorphe Fortsetzung $\mathrm{Ln}: \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ ebenfalls $\mathrm{Ln}'(z) = \frac{1}{z}$. Hier haben wir verwendet, dass auf $(0,\infty)$ die komplexe und die reelle Ableitung übereinstimmen, also $\mathrm{Ln}'(x) = \partial_x \mathrm{Ln}(x) = \frac{d}{dx} \ln(x)$ für $x \in (0,\infty)$.

Satz 6.2 Sei $f \in H(U)$ und $z_0 \in U$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist auf einer Umgebung von z_0 injektiv.

(ii) f ist auf einer offenen Umgebung von z_0 biholomorph

(iii) $f'(z_0) \neq 0$

Beweis: Für das reelle Differential Df gilt

$$\det Df = \left|\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \partial_x u & -\partial_x v \\ \partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix}\right| = |\partial_x u|^2 + |\partial_x v|^2 = |f'|^2.$$

Der Satz über die Umkehrabbildung (Satz 6.8 aus Analysis 2) liefert daher sofort (iii) $\Rightarrow$ (ii), da mit Df auch $D(f^{-1}) = (Df)^{-1}$ eine Drehstreckung ist. (ii) $\Rightarrow$ (i) ist sowieso klar.
Schließlich erhalten wir (i) $\Rightarrow$ (iii) aus Satz 5.7. a): Denn

$$f(z) - f(z_0) = h(z)^m = (p_m \circ h)(z)$$

in einer Umgebung V von z_0 impliziert $m = 1$, da $h: V \to h(V)$ gemäß dem zuvor Gesagten wegen $h'(z_0) \neq 0$ auf einer Umgebung von z_0 biholomorph ist und $p_m: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto p_m(z) = z^m$ für

$m \geq 2$ auf keiner Umgebung der Null injektiv ist. $\boxtimes$

Gebietstreue

Satz 6.3 von der Gebietstreue

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und die Funktion $f \in H(U)$ nichtkonstant. Dann ist auch $f(U) \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Bem.: Der nichtoffensichtliche Teil dieser Aussage ist, dass $f(U)$ wieder offen ist. Denn z.B. für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist zwar $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, aber $f((-1,1)) = [0,1)$ nicht mehr offen.

Beweis (von Satz 6.3).

Jeder Weg $\gamma: [0,1] \to U$ wird durch $f \circ \gamma: [0,1] \to f(U)$ zu einem Weg in $f(U)$ „geliftet". Je zwei Punkte in $f(U)$ lassen sich also in $f(U)$ verbinden, indem man ihre Urbilder in U verbindet und dann liftet. Also ist U wegzusammenhängend.

Sei $z_0 \in U$. Es ist zu zeigen, dass $f(z_0)$ eine offene Umgebung besitzt, die ganz in $f(U)$ liegt. Nach Satz 5.7. a) existiert eine Umgebung $U_1 \subseteq U$ von z_0 und eine holomorphe Funktion $h: U_1 \to \mathbb{C}$ mit $h'(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $f(z) - f(z_0) = h(z)^m$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 6.2. ist h auf einer möglicherweise kleineren Umgebung $U_2 \subseteq U_1$ von z_0 biholomorph. Damit enthält aber $h(U_2)$ eine offene Kreisscheibe $B_\delta(0)$ mit $0 < \delta < 1$, deren

Urbild $U_3 := h^{-1}(B_\delta(0)) \subset U_2$ weiterhin Umgebung von z_0 ist.

Wegen $p_m(B_\delta(0)) = B_{\delta^m}(0)$ für $m \in \mathbb{N}$ ist schließlich

$f(U_3) = f(z_0) + p_m \circ h(U_3) = B_{\delta^m}(z_0) \subset f(U)$

Umgebung von $f(z_0)$ in $f(U)$. $\boxtimes$

Da also für $f \in H(U)$ das Bild $f(U)$ immer offen ist (es sei denn, f ist konstant), kann eine holomorphe Funktion keine Betragsmaxima haben.

<u>Korollar 6.4</u> <u>Maximumprinzip</u>

Es sei U ein Gebiet und $f \in H(U)$.

- Wenn $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in U$ ein lokales Maximum hat, so ist f konstant.
- Ist $K \subset U$ kompakt und f nichtkonstant, so gilt

$$\max_{z \in K} |f(z)| = \max_{z \in \partial K} |f(z)| < \sup_{z \in U \setminus K} |f(z)| = \sup_{z \in U} |f(z)|$$

<u>Beweis:</u> Es sei $z_0 \in U$ ein lokales Maximum von $|f|$, d.h. es gibt eine Kreisscheibe $B = B_r(z_0) \subset U$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in B$. Angenommen, f ist nicht konstant. Dann wäre nach Satz 6.3. $f(B)$ eine Umgebung von $f(z_0)$, im Widerspruch zu $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in B$.

Die stetige Funktion $z \mapsto |f(z)|$ nimmt auf dem Kompaktum K ihr Maximum an, es gibt also ein $z_0 \in K$ mit $|f(z_0)| = \max_{z \in K} |f(z)|$.
Nach Teil 1 muss es aber in jeder Umgebung von z_0 ein z geben

mit $|f(z)| > |f(z_0)|$, welches daher in $U \setminus K$ liegen muss. Also gilt $z_0 \in \partial K$ und $\max_{z \in K} |f(z)| = \max_{z \in \partial K} |f(z)| = |f(z_0)| < \sup_{z \in U \setminus K} |f(z)|$.

$\blacksquare$

„Die Betragsmaxima einer holomorphen Funktion liegen also am Rand".