7. Stunde am 3. Juni

Monday, 27 May 2019 21:48

Satz 6.5 Riemannscher Hebbarkeitssatz

Es sei $f \in H(U \setminus \{z_0\})$ in einer Umgebung von $z_0 \in U$ beschränkt. Dann lässt sich f in eindeutiger Weise zu einer auf U holomorphen Funktion fortsetzen.

Beweis: Definiere $g(z) := (z-z_0)^2 f(z)$ für $z \in U\setminus\{z_0\}$ und $g(z_0) = 0$. Dann ist

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0,$$

da f ja in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist.

Somit ist $g \in H(U)$ und Taylorentwicklung um z_0 liefert

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{für } z \in B_r(z_0) \subset U.$$

Setzt man nun $f(z_0) := c_2$, so gilt wg. $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2}$ für $z = z_0$ dann auf ganz $B_r(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-z_0)^n.$$

Also ist f holomorph in $B_r(z_0)$. $\blacksquare$

Globale Cauchy'sche Theorie

Definition 7.1 (Index) Sei Γ ein Zyklus und $z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$.

Dann heißt

$$\mathrm{ind}\ (z) := \frac{1}{\ } \int \frac{1}{\ }\, d\zeta$$

Dann heißt
$$\operatorname{ind}_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$$
der Index von Γ bzgl. z.

Wir werden sehen, dass $\operatorname{ind}_\Gamma(z)$ eine ganze Zahl ist, die angibt, wie oft z von dem Zykel Γ umlaufen wird.
Ein erster Schritt dazu ist das folgende Lemma.

Lemma 7.2. (Umlaufzahl) Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ein Weg. Dann gibt es ein stückweise stetig differenzierbares stetiges Argument $\phi = \arg\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass mit $r(t) := |\gamma(t)|$
$$\gamma(t) = r(t)\, e^{i\phi(t)} \quad \text{für alle } t \in [a,b].$$
Es ist ϕ bis auf eine additive Konstante aus $2\pi\mathbb{Z}$ eindeutig.
Wenn γ geschlossen ist, dann gilt
$$\operatorname{ind}_\gamma(0) = (\phi(b) - \phi(a))/2\pi \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Sei o.B.d.A. γ stetig diffbar.
Eindeutigkeit: Angenommen, es gibt ein stetig diffbares Argument $\phi = \arg\gamma$, also $\gamma(t) = r(t)\, e^{i\phi(t)}$.
Dann wäre $\gamma'(t) = r'(t) e^{i\phi(t)} + i r(t)\phi'(t) e^{i\phi(t)}$, also
$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\,\phi'(t)$$
und nach Integration
$$\phi(t) = \phi(a) + \int_a^t \operatorname{Im}\frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)}\, d\tau \qquad (*)$$
wobei $\phi(a)$ ein Argument von $\gamma(a)$ sein muss, also bis auf eine additive Konstante aus $2\pi\mathbb{Z}$ eindeutig festgelegt ist.

Existenz: Sei nun $\phi(a)$ ein Argument von $\gamma(a)$ und $\phi(t)$ durch (*) definiert. Sei weiterhin $\tilde{\gamma}(t) := r(t)e^{i\phi(t)}$.
Dann gilt für die Funktion $h(t) := \frac{\tilde{\gamma}(t)}{\gamma(t)}$, dass

$h(a) = \frac{\tilde{\gamma}(a)}{\gamma(a)} = 1$ und wegen

$$\frac{\tilde{\gamma}'}{\tilde{\gamma}} = \frac{r'}{r} + i\phi' \overset{(**)}{=} \operatorname{Re}\frac{\gamma'}{\gamma} + i \operatorname{Im}\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma'}{\gamma}$$

(**) für Realteil nachrechnen, für Imaginärteil (*).

auch

$$h'(t) = \frac{\tilde{\gamma}'(t)\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\gamma'(t)}{\gamma(t)^2} = \frac{\tilde{\gamma}(t)}{\gamma(t)}\left(\frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\tilde{\gamma}(t)} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right) = 0.$$

Also ist $h(t) \equiv 1$ und somit $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$.

Index: Wenn γ geschlossen ist, gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$ und somit $\phi(b) - \phi(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Andererseits ist wegen $r(a) = r(b)$

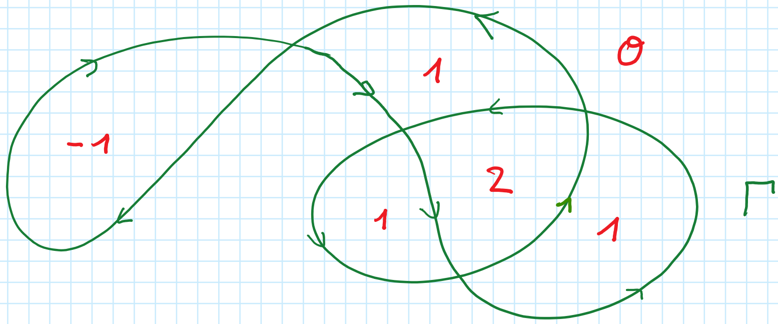
$$\operatorname{ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{r'(t)}{r(t)}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_a^b \phi'(t)\,dt =$$

$$= \frac{\ln r(b) - \ln r(a)}{2\pi i} + \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi} = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

$\blacksquare$

Da die Spur $[\Gamma]$ eines Zyklus kompakt ist, ist das Komplement $\mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ eine offene unbeschränkte Menge. Es zerfällt in endlich viele Gebiete, genannt Zusammenhangskomponenten, von denen genau eine unbeschränkt ist.



<u>Korollar 7.3.</u> Es sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$. Dann ist $\operatorname{ind}_\Gamma : \mathbb{C}\setminus[\Gamma] \to \mathbb{Z}$ auf jeder Komponente von $\mathbb{C}\setminus[\Gamma]$ konstant und auf der unbeschränkten Komponente Null.

<u>Beweis:</u> Es sei $\Gamma = \sum_{j=1}^{r} n_j \gamma_j$. Aus Lemma 7.2 folgt für $z \in \mathbb{C}\setminus[\Gamma]$ sofort

$$\operatorname{ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{r} n_j \int_{\gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{j=1}^{r} n_j \operatorname{ind}_{\gamma_j}(z) \in \mathbb{Z}.$$

Wir zeigen noch, dass $\operatorname{ind}_\Gamma(\cdot)$ stetig ist und somit auf jeder Zusammenhangskomponente des Definitionsbereichs $\mathbb{C}\setminus[\Gamma]$ konstant sein muss. Mit der Standardabschätzung folgt für $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}\setminus[\Gamma]$

$$|\operatorname{ind}_\Gamma(z) - \operatorname{ind}_\Gamma(\tilde{z})| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma \frac{z - \tilde{z}}{(\zeta - z)\cdot(\zeta - \tilde{z})}\, d\zeta \right| \leq \frac{L(\Gamma)\,|z - \tilde{z}|}{2\pi \operatorname{dist}(\{z,\tilde{z}\},[\Gamma])^2}$$

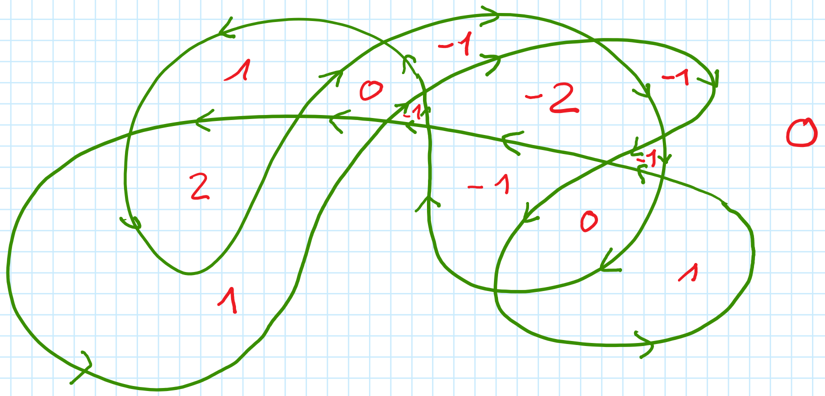
und somit die Stetigkeit von $\operatorname{ind}_\Gamma$. Liegen $z_0, z_1 \in \mathbb{C}\setminus[\Gamma]$ in derselben Komponente, so sind sie durch einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\setminus[\Gamma]$ verbindbar. Als stetige Funktion muss $\operatorname{ind}_\Gamma \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{Z}$ also konstant sein und es folgt $\operatorname{ind}_\Gamma(z_0) = \operatorname{ind}_\Gamma(z_1)$.

Für die unbeschränkte Komponente folgt die Behauptung aus

$$\operatorname{ind}_\Gamma(z) \leq \frac{L(\Gamma)}{2\pi \operatorname{dist}(z,\Gamma)} \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$$

$\blacksquare$

Zur praktischen Bestimmung des Index verwendet man folgende Regel: „Quert man ein Stück von Γ das m-mal durchlaufen wird außerhalb einer Kreuzung von rechts nach links (aus Sicht der Fahrtrichtung des Weges), so vergrößert sich der Index um m." (vgl. Satz 5.1.4. in Bornemann).



<u>Definition 7.4</u> Es sei Γ ein Zyklus und $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich.

- Die offenen Mengen

$$\mathrm{Int}(\Gamma) = \{ z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma] \mid \mathrm{ind}_\Gamma(z) \neq 0 \}$$
$$\mathrm{Ext}(\Gamma) = \{ z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma] \mid \mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0 \}$$

heißen das <u>Innere</u> bzw. das <u>Äußere</u> von Γ.

- Liegt Γ in U und gilt $\mathrm{Int}(\Gamma) \subset U$, so heißt Γ <u>nullhomolog in U</u>.
- Zwei Zyklen heißen <u>homolog in U</u>, wenn ihre Differenz nullhomolog in U ist.

Es ist also jeder Zyklus nullhomolog in $\mathbb{C}$, aber beispielsweise ist $\partial B_r(0)$ nicht nullhomolog in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.