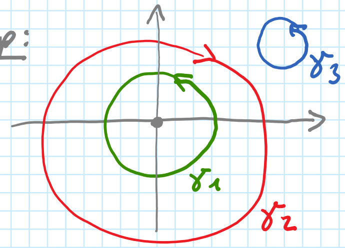
Eine oftmals anschaulich leichter zugängliche Bedingung dafür, dass zwei geschlossene Wege homolog sind, liefert der Begriff der Homotopie: Zwei geschlossene Wege in U heißen homotop in U, wenn „sie sich stetig ineinander deformieren lassen, ohne U zu verlassen".

Bsp:



$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind jeweils homotop in $\mathbb{C}$ aber nicht homotop in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, weil man für eine stetige Deformation die Wege jeweils über das „Loch" bei Null ziehen müsste.

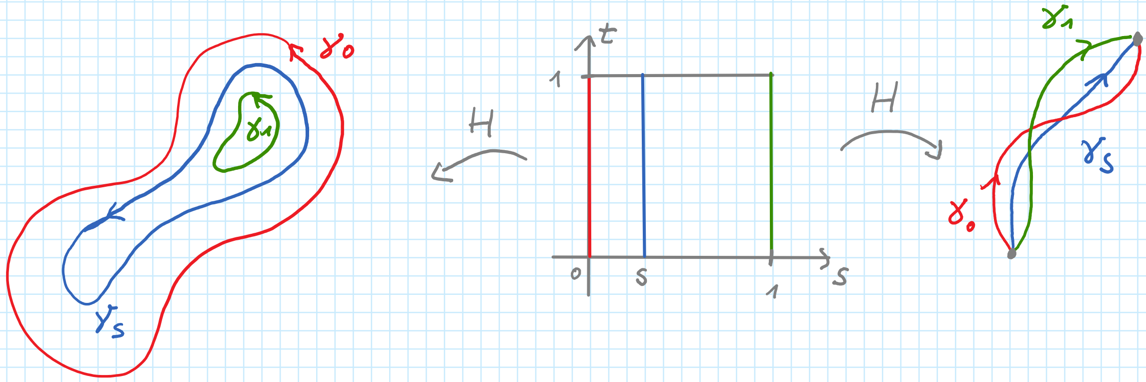
Proposition 8.1.: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ Wege in U. Es existiere weiterhin eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to U \quad \text{mit} \quad H(0,\cdot) = \gamma_0 \text{ und } H(1,\cdot) = \gamma_1$$

und wir setzen $\gamma_s : [0,1] \to U$, $\gamma_s(t) := H(s,t)$.

a) Falls $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ für alle $s \in [0,1]$, so heißen γ_0 und γ_1 homotop in U und sind auch homolog in U.

b) Falls alle γ_s dieselben Anfangs- und Endpunkte haben, also $\gamma_s(0) = \gamma_0(0)$ und $\gamma_s(1) = \gamma_0(1)$ für alle $s \in [0,1]$, so heißen γ_0 und γ_1 homotop in U bei festen Endpunkten und $\gamma_0 - \gamma_1$ ist nullhomolog in U.



Beweis: Wir führen den Beweis unter der zusätzlichen Annahme, dass $\gamma_s : [0,1] \to U$ für alle $s \in [0,1]$ ein Integrationsweg ist, also stückweise stetig diffbar, und, dass $(s,t) \mapsto \gamma_s'(t)$ stetig ist. (Die allg. Aussage erhält man durch ein Approximationsargument)

a) Es ist zu zeigen, dass $\operatorname{Int}(\gamma_0 - \gamma_1) \subset U$, also $\operatorname{ind}_{\gamma_0}(z) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(z)$ für alle $z \notin U$. Für solche z ist aber die Abbildung

$$s \mapsto \operatorname{ind}_{\gamma_s}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma_s'(t)}{\gamma_s(t) - z}\, dt \quad \in \mathbb{Z}$$

stetig und somit konstant.

b) Übungsaufgabe. ☒

Der Begriff der Homologie ist aber allgemeiner und wir zeigen daher die folgende homologe Version der Integralsätze.

Satz 8.2. Cauchy Integralsatz und -formel

Es sei Γ ein Zyklus in einem Bereich $U \subset \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(i) Γ ist nullhomolog in U.

(ii) Für alle $f \in H(U)$ gilt der Cauchy Integralsatz

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

(iii) Für alle $f \in H(U)$ gilt die Cauchy Integralformel

$$\operatorname{ind}_\Gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{für alle } z \in U \setminus [\Gamma].$$

Beweis: (ii) ⇒ (i): Für $z \notin U$ ist $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ holomorph in U.

Beweis: (ii) ⇒ (i): Für $z \notin U$ ist $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ holomorph in U.
Aus (ii) folgt daher

$$\operatorname{ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

also $z \in \operatorname{Ext}(\Gamma)$. Somit gilt $\operatorname{Int}(\Gamma) \subset U$ und Γ ist nullhomolog in U.

(iii) ⇒ (ii): Für ein beliebiges $z \in U \setminus [\Gamma]$ sei $h(\zeta) := (\zeta - z) f(\zeta)$. Wegen (iii) ist dann

$$0 = \operatorname{ind}_\Gamma(z) \underbrace{h(z)}_{=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta .$$

(i) ⇒ (iii): Nach Definition des Index müssen wir zeigen, dass

$$h(z) := \int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \underbrace{\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta}_{= 2\pi i \operatorname{ind}_\Gamma(z)}$$

für alle $z \in U \setminus [\Gamma]$ gleich Null ist.
Dazu zeigen wir zwei Dinge: (a) h lässt sich holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. (b) Es gilt $\lim_{|z| \to \infty} h(z) = 0$.
Mit dem Satz von Liouville ist h dann auf ganz $\mathbb{C}$ konstant gleich Null.
(a) Da f holomorph ist, lässt sich der Differenzenquotient

$$g(\zeta, z) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

durch $g(z, z) := f'(z)$ zu einer stetigen Funktion $g: U \times U \to \mathbb{C}$ fortsetzen: Für $\zeta \neq z$ ist g offenbar stetig und bei $\zeta = z$ gilt wegen stetig und bei $\zeta = z$ gilt wegen

$$g(z_1, z_2) - g(z, z) = \frac{1}{z_1 - z_2} \int_{[z_1, z_2]} (f'(\omega) - f'(z))\, d\omega$$

dass

$$\lim_{(z_1,z_2)\to(z,z)} |g(z_1,z_2) - g(z,z)| \leq \lim_{(z_1,z_2)\to(z,z)} \overbrace{\frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_2|}}^{=1} \max_{\omega \in [z_1, z_2]} |f'(\omega) - f'(z)| = 0,$$

da f' stetig ist. ✓

Für festes $\zeta \in U$ ist die Abbildung $z \mapsto g(\zeta, z)$ nach dem Hebbarkeitssatz in U holomorph. Als Fortsetzung von h definieren wir

$$h(z) = \begin{cases} \int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta & \text{falls } z \in U \\ \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta & \text{falls } z \in \operatorname{Ext}(\Gamma). \end{cases}$$

Beide Ausdrücke stimmen für $z \in U \cap \operatorname{Ext}(\Gamma)$ wegen $\operatorname{ind}_\Gamma(z) = 0$ überein. Nach Voraussetzung (i) ist Γ nullhomolog in U, also $\mathbb{C} \setminus U \subset \operatorname{Ext}(\Gamma)$ und somit haben wir h auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt. Da die Riemann-summen der h definierenden Integrale gleichmäßig konvergieren, ist h nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß (Satz 4.8) auch holomorph.

(b) Da die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ in $\operatorname{Ext}(\Gamma)$ liegt, ist

$$|h(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \frac{L(\Gamma) \cdot \|f\|_\Gamma}{\operatorname{dist}(z, \Gamma)} \xrightarrow{|z| \to \infty} 0.$$

Also ist h beschränkt und somit nach Liouville konstant gleich Null. $\boxtimes$

Proposition 8.1. und Satz 8.2. liefern also das folgende

<u>Prinzip:</u> Für $f \in H(U)$ ändert sich der Wert des Integrals

Proposition 8.1. und Satz 8.2. zeigen uns das folgende

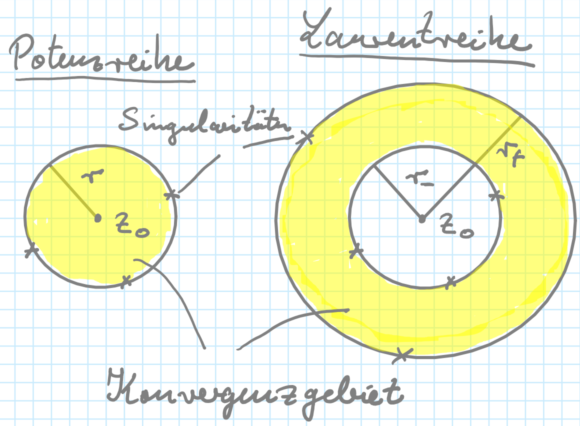
Prinzip: Für $f \in H(U)$ ändert sich der Wert des Integrals $\int_\gamma f(z)\,dz$ nicht, wenn man (a) den geschlossenen Weg γ stetig deformiert, ohne U zu verlassen, bzw. wenn man (b) den Weg γ bei festgehaltenen Endpunkten stetig deformiert ohne U zu verlassen.

Laurentreihen

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r_- < r_+ \leq \infty$.
Dann heißt

$$A := \{ z \in \mathbb{C} \mid r_- < |z - z_0| < r_+ \}$$

der Kreisring mit Radien r_-, r_+ um z_0.



Satz 8.3 Laurentreihenentwicklung

Jede im Kreisring $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid r_- < |z - z_0| < r_+ \}$, $0 \leq r_- < r_+ \leq \infty$, holomorphe Funktion f ist in A eindeutig in eine Laurentreihe entwickelbar:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in A,$$

wobei die Reihe lokal-gleichmäßig konvergiert.
Die Koeffizienten a_n sind durch

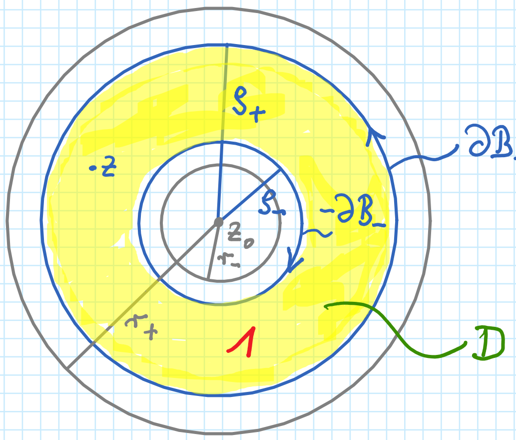
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \quad , n \in \mathbb{Z},$$

für ein beliebiges $r_- < r < r_+$ gegeben.

Bemerkung: Für $n \in \mathbb{N}_0$ stimmt die Formel für a_n mit derjenigen für die Taylorkoeffizienten überein. Allerdings sind die a_n genau dann die Taylorkoeffizienten, wenn f auf $B_r(z_0)$ holomorph ist.

__Beweis:__ Wir zeigen die Behauptung für $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \varrho_- < |z-z_0| < \varrho_+\}$ mit beliebig gewählten $r_- < \varrho_- < \varrho_+ < r_+$, womit die Behauptung dann auch für A gezeigt ist.

Mit $B_\pm := B_{\varrho_\pm}(z_0)$ ist $D = B_+ \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{B_-})$. Der Randzyklus $\Gamma := \partial B_+ - \partial B_-$ ist nullhomolog in A und $\operatorname{ind}_\Gamma(z) = 1$ für alle $z \in D$.



A ist der Ring zwischen den grauen Kreisen

Die Cauchy Integralformel liefert also für alle $z \in D$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$=: f^+(z) + f^-(z)$$

Die Integrale definieren nun offenbar aber jeweils eine holomorphe Funktion $f^+ \in H(B_+)$ und $f^- \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{B_-})$, wobei

$$(*) \quad |f^-(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{L(\partial B_-) \cdot \|f\|_{\partial B_-}}{|z| - \varrho_-} \xrightarrow{|z| \to \infty} 0 .$$

Da $r_- < \varrho_- < \varrho_+ < r_+$ beliebig waren, kann man f^+ holomorph auf $B_{r_+}(z_0)$ und f^- holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_-}(z_0)}$ fortsetzen. Die Zerlegung $f = f^+ + f^-$ heißt __Laurentdarstellung__ von f im Kreisring A; dabei heißt f^+ __Nebenteil__ und f^- __Hauptteil__ von f.

Da $w \mapsto f^-(z_0 + \frac{1}{w})$ wg. $(*)$ bei $w = 0$ beschränkt bleibt, ist diese Funktion nach dem Hebbarkeitssatz holomorph auf $B_{1/r_-}(0)$ und hat bei $w=0$ den Wert Null.

Entwickelt man nun Haupt- und Nebenteil in Potenzreihen,

$$f^+(z_0+w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad (|w|<r_+), \quad f^-\left(z_0+\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \quad \left(|w|<\frac{1}{r_-}\right),$$

so ergibt sich die Laurententwicklung in A

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \text{für } z \in A,$$

die wie die beiden Potenzreihen lokal-gleichmäßig konvergiert. Daher können wir wieder Summation und Integration vertauschen und erhalten für jedes $r_- < r < r_+$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int_{\partial B_r(z_0)} \zeta^{m-n-1}\, d\zeta = a_n .$$

Diese Formel zeigt insbesondere, dass die a_n eindeutig bestimmt sind und damit auch die Aufspaltung in Haupt- und Nebenteil eindeutig ist. $\blacksquare$