Isolierte Singularitäten

Definition 9.1 Isolierte Singularitäten

Ist $f \in H(U \setminus \{z_0\})$, so heißt $z_0 \in U$ isolierte Singularität von f. Sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ die Laurentreihe von f auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ für ein r mit $B_r(z_0) \subset U$. Dann heißt $\nu_f(z_0) := \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid c_n \neq 0\} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ die Ordnung der Singularität und sie heißt

a) hebbar, falls $\nu_f(z_0) \geq 0$

b) Pol der Ordnung $-\nu_f(z_0)$, falls $-\infty < \nu_f(z_0) < 0$

c) wesentliche Singularität, falls $\nu_f(z_0) = -\infty$.

Im Satz 6.5. haben wir bereits gezeigt, dass man f im Falle einer hebbaren Singularität holomorph auf ganz U fortsetzen kann. Wir charakterisieren in den folgenden Sätzen auch noch Pole und wesentliche Singularitäten durch ihr Verhalten nahe z_0.

Satz 9.2. Verhalten bei Polen

Sei z_0 isolierte Singularität von $f \in H(U \setminus \{z_0\})$.

Dann sind äquivalent:

(i) $-\infty < \nu_f(z_0) < 0$, d.h. z_0 ist eine Polstelle

(ii) zu jedem $M > 0$ existiert eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 mit $|f(z)| \geq M$ für alle $z \in V \setminus \{z_0\}$, also

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty .$$

<u>Beweis:</u> <u>(i) ⇒ (ii)</u>: Sei $k := -v_f(z_0)$. Nach Satz 6.5 ist dann $g(z) := f(z)(z-z_0)^k$ holomorph fortsetzbar auf U mit $g(z_0) \neq 0$. (ii) folgt dann aus $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$.

<u>(ii) ⇒ (i)</u>: Wähle zu $M = 1$ eine entsprechende Umgebung V und setze auf V

$$g(z) := \begin{cases} 0 & \text{falls } z = z_0 \\ \frac{1}{f(z)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist $g \in H(V)$ und daher $g(z) = (z-z_0)^k h(z)$ für ein $k \geq 1$ und ein $h \in H(V)$ mit $h(z_0) \neq 0$ und $h(z) \neq 0$ auf einer möglicherweise noch kleineren Umgebung von z_0. Damit ergibt sich

$$f(z) = (z-z_0)^{-k} \cdot h^{-1}(z) = (z-z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} h_n (z-z_0)^n ,$$

also $v_f(z_0) = -k$. $\boxtimes$

<u>Satz 9.3.</u> <u>Casorati-Weierstraß</u>

Es sei $z_0 \in U$ eine wesentliche Singularität von $f \in H(U \setminus \{z_0\})$. Dann liegt das Bild $f(V \setminus \{z_0\})$ einer jeden Umgebung $V \subset U$ von z_0 dicht in $\mathbb{C}$.

<u>Beweis:</u> Angenommen, die Behauptung stimmt nicht. Dann gibt es einen Wert $w \in \mathbb{C}$, ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass $|f(z) - w| > \varepsilon$ für alle $z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w} \quad , \; z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$$

lässt sich dann wieder holomorph auf $B_\delta(z_0)$ fortsetzen. Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist f um z_0 beschränkt und z_0 somit eine hebbare Singularität. Ist $g(z_0) = 0$, so gilt $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \lim\limits_{z \to z_0} \left| \frac{1}{g(z)} + w \right| = \infty$, womit z_0 gemäß Satz 9.2. eine Polstelle ist. $\blacksquare$

<u>Beispiel 9.4</u>: Sei $f \in H(\mathbb{C})$ eine <u>transzendente</u> Funktion, d.h. kein Polynom, beispielsweise $\exp(z)$. Dann hat die Funktion $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ bei $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, denn ihre Laurentreihe bei Null ist

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{f^{(-n)}(0)}{(-n)!} z^n .$$

<u>Korollar 9.5.</u>: <u>Verhalten bei ∞</u>

Sei $f \in H(\mathbb{C} \setminus K)$ für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$. Dann wird das Verhalten von f für $z \to \infty$ durch genau einen der folgenden Fälle beschrieben:

(a) <u>hebbare Singularität</u>: Es gibt ein $w \in \mathbb{C}$ mit
$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w.$$

(b) <u>Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$</u>: Es gibt ein $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit
$$f(z) = a z^m + o(|z|^m).$$

(c) <u>wesentliche Singularität</u>: Zu jedem $w \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge (z_n) mit $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$ und $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = w$.

Eine ganze Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ ist im Fall (a) konstant, im Fall (b) ein Polynom vom Grad m und im Fall (c) transzendent.

Der Residuenkalkül

Sei $f \in H(U \setminus \{z_0\})$ und $\partial B_\varrho(z_0)$ im Konvergenzgebiet der Laurentreihe von f um z_0. Dann gilt

$$\int_{\partial B_\varrho(z_0)} f(z)\,dz = \int_{\partial B_\varrho(z_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\partial B_\varrho(z_0)} (z-z_0)^n \,dz = 2\pi i\, c_{-1}.$$

Es ist also der Koeffizient c_{-1} die einzige Obstruktion für den Cauchy Integralsatz.

Definition 9.6. Residuum

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $\Delta \subset U$ diskret und $f \in H(U \setminus \Delta)$. Dann ist f um jedes $z_0 \in U$ durch eine Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ darstellbar und man nennt

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) := c_{-1}$$

das Residuum von f im Punkt z_0.

Gemäß Satz 8.3. lässt sich das Residuum durch

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(z_0)} f(z)\,dz$$

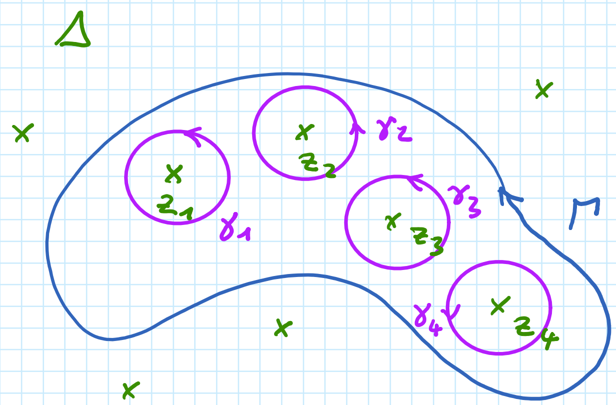
berechnen, wobei $\varrho > 0$ so klein gewählt werden muss, dass $B_\varrho(z_0) \subset U$ und $B_\varrho(z_0) \cap \Delta \subset \{z_0\}$. Offenbar ist $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = 0$ für alle $z_0 \in U \setminus \Delta$.

Satz 9.7. Residuensatz

Sei Δ diskret im Bereich U und $f \in H(U \setminus \Delta)$. Dann gilt für jeden in U nullhomologen Zyklus Γ, der Δ nicht durchläuft, dass

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z \in \Delta \cap \operatorname{Int}(\Gamma)} \operatorname{ind}_\Gamma(z) \cdot \operatorname{Res}_z(f).$$

Dabei wird mit $\Delta \cap \operatorname{Int}(\Gamma)$ über eine endliche Menge summiert.



Beweis:

Es ist $K := \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ext}(\Gamma)$ kompakt und, da Γ in U nullhomolog ist, $K \subset U$.

Also ist $\Delta_\Gamma := \Delta \cap \operatorname{Int}(\Gamma) \subset \Delta \cap K$ endlich und wir setzen $\Delta_\Gamma =: \{z_1, \dots, z_n\}$. Zu jedem $j \in \{1, \dots, n\}$ wählen wir $r_j > 0$ so klein, dass $\overline{B_{r_j}(z_j)} \setminus \{z_j\} \subset U \setminus \Delta$.

Wir setzen $\gamma_j := \partial B_{r_j}(z_j)$ und $m_j := \operatorname{ind}_\Gamma(z_j)$.

Dann ist der Zyklus $\Gamma_0 := \Gamma - m_1\gamma_1 - \dots - m_n\gamma_n$ nullhomolog in $U \setminus \Delta$: Für $z \in (U \setminus \Delta)^c = U^c \cup \Delta$ gilt nämlich

$$\operatorname{ind}_{\Gamma_0}(z) = \operatorname{ind}_\Gamma(z) - \sum_{j=1}^n m_j \operatorname{ind}_{\gamma_j}(z) =$$

$$= \begin{cases} 0 - 0 = 0 & \text{falls } z \notin U \\ m_i - m_i = 0 & \text{falls } z = z_i \in \Delta_\Gamma \\ 0 - 0 = 0 & \text{falls } z \in \Delta \setminus \Delta_\Gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad \\ 0 - 0 = 0 & \text{falls } z \in \Delta \setminus \Delta_\Gamma \end{cases}$$

Schließlich liefert der Cauchy Integralsatz, dass $\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = 0$, also

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} m_j \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} m_j \operatorname{Res}_{z_j}(f).$$

$\boxtimes$