Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
15. April 2019

Einführung Funktionentheorie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf Holomorphie:

(a) $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$

(b) $g(z) = \sin(z)$

(c) $h(z) = |z|^2$

(d) $k(z) = \mathrm{Re}(z)$

An die Definition der Sinusfunktion im Komplexen wird in Aufgabe 4 erinnert.

Aufgabe 2: Visualisierung komplexer Funktionen

Lesen und verstehen Sie soweit möglich den Abschnitt 1.7 zur Visualisierung komplexer Funktionen im Buch "Funktionentheorie" von Folkmar Bornemann. Sie können das Buch kostenfrei bei Springer unter `https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-0348-0472-1` als pdf-File herunterladen. (Dazu müssen Sie sich allerdings mit Ihrer Studierendenkennung innerhalb des Netzes der Uni Tübingen einwählen. Bitte laden Sie das Buch nur einmal herunter und speichern Sie es, da sonst möglicherweise zusätzliche Kosten auf die Universität zukommen.)

Die Inversion der komplexen Ebene ist gegeben durch

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Skizzieren Sie in einem Diagramm sowohl die Höhenlinien des Betrags $|f|$ der Inversion f für geeignete Werte, sowie die Linien konstanten Arguments von f für die Werte $n \cdot \frac{\pi}{4}$ für $n = 0, \ldots, 7$.

Fertigen Sie das entsprechende Diagramm jeweils auch für die Funktionen $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^3$, und $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(z)$ an.

Alle weiteren Aufgaben auf diesem Blatt dienen zur Auffrischung und Wiederholung von Inhalten aus Analysis 1 und sind zur freiwilligen Bearbeitung empfohlen, müssen aber nicht abgegeben werden. Sie werden aber in den Übungen in der zweiten Semesterwoche besprochen.

Aufgabe 3: Polardarstellung komplexer Zahlen

a) Bestimmen Sie die Polardarstellung von

(i) $z_1 \;=\; \mathrm{i} + 1\,,$

(ii) $z_2 \;=\; \sqrt{3} + \mathrm{i}\,.$

Berechnen Sie dann $z_1^2\,\overline{z_2}^3$ einmal direkt durch ausmultiplizieren von $(\mathrm{i}+1)^2(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3$ und einmal unter Verwendung der Polardarstellung.

b) Bestimmen Sie alle fünften Wurzeln von i und alle dritten Wurzeln von $\frac{27}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})$.

c) Was ist falsch an folgender Rechnung? Erläutern Sie!

$$-1 \;=\; \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} \;=\; \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} \;=\; \sqrt{(-1)(-1)} \;=\; \sqrt{1} \;=\; 1.$$

Aufgabe 4: Sinus und Kosinus im Komplexen

a) Die Funktionen $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert man durch

$$\cos(z) \;:=\; (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/2, \quad \sin(z) \;:=\; (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/(2\mathrm{i}).$$

i) Bestimmen Sie alle Nullstellen von cos und sin in $\mathbb{C}$ ausgehend von den Ihnen bekannten Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion.

ii) Berechnen Sie $\cos^2(z) + \sin^2(z)$.

b) Weiterhin definiert man die Hyperbelfunktionen $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\cosh(z) \;:=\; \cos(\mathrm{i}z), \quad \sinh(z) \;:=\; \sin(\mathrm{i}z)/\mathrm{i}.$$

i) Was ergibt sich für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im} z = 0$? Wie sehen also Hyperbelfunktionen auf $\mathbb{R}$ aus?

ii) Berechnen Sie $\cosh^2(z) - \sinh^2(z)$.

Aufgabe 5: Cayley-Transformation

Die Cayley-Transformation der komplexen Ebene ist gegeben durch

$$g : \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\},\; z \mapsto g(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}.$$

Zeigen Sie, dass g eine Bijektion ist und bestimmen Sie die Umkehrabbildung. Zeigen Sie weiterhin, dass g die obere Halbebene H_+ in die Einheitskreischeibe $B_1(0)$ abbildet, sowie die reelle Achse $\mathbb{R}$ in den Einheitskreis $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Dienstag den 23.04.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.

Zum Ablauf der Übungen:

Jeweils montags wird in der Vorlesung ein neues Übungsblatt mit Aufgaben zum Stoff der Vorlesung verteilt. Die intensive Beschäftigung mit diesen Aufgaben und die schriftliche Ausarbeitung der Lösungen sind unabdingbar für ein wirkliches Verständnis des Stoffs der Vorlesung. Jeder Teilnehmer muss seine schriftliche Ausarbeitung der Aufgaben spätestens am darauffolgenden Dienstag bis 10.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Briefkästen im 3. Stock des C-Baus abgeben.

Die Aufgaben werden von den Übungsgruppenleitern korrigiert und danach in den Übungsgruppen besprochen. Zu einem Teil der Aufgaben werden die Lösungen dabei von Studierenden präsentiert. Die Übungsgruppenleiter teilen Ihnen spätestens eine Woche zuvor mit, ob und welche Aufgabe Sie vorrechnen müssen. Während der Vorbereitungswoche können Sie sich natürlich Hilfe und Feedback von Ihrem Übungsgruppenleiter holen. Das Vorrechnen einer Aufgabe kann nur in gut begründeten Ausnahmefällen abgelehnt oder verschoben werden. Denken Sie beim Vorrechnen daran, dass Sie nicht nur den Übungsgruppenleiter überzeugen müssen, dass Sie die Aufgabe verstanden und richtig gelöst haben, sondern in erster Linie Ihren Kommilitonen die Lösung der Aufgabe erklären sollen. Daher sollten Sie Ihren Vortrag sehr gut vorbereiten und durchdenken.

Ist Ihre Präsentation unverständlich oder falsch, so werden Sie automatisch in der nächsten Woche wieder zum Vorrechnen eingeteilt. Nach zweimaligem ungenügenden Vorrechnen einer Aufgabe entfällt die Berechtigung zur Klausurteilnahme, ebenso wie bei unentschuldigtem Fehlen in einer Übungsstunde, in der man vorrechnen sollte.

Voraussetzungen für die Klausurzulassung im Teil Funktionentheorie des Moduls “Einführung Funktionentheorie und gewöhnliche DGL” bzw. im Modul Mathematik für Physiker 4 sind:

(1) Die sinnvolle Bearbeitung und schriftliche Abgabe von mindestens 50% der Übungsaufgaben zu den jeweils auf den Blättern genannten Terminen.

(2) Die korrekte und sinnvolle Präsentation der zugewiesenen Aufgaben in den Übungsgruppen.