

EINFÜHRUNG FUNKTIONENTHEORIE

Übungsblatt 11

Aufgabe 28: Der Satz von Rouché

- (a) Zeigen Sie die folgende Version des Satzes von Rouché mithilfe des entsprechenden Satzes aus der Vorlesung:

Sei $K \subset U \subset \mathbb{C}$ ein einfach berandetes Kompaktum und $f, g \in H(U)$ erfüllen

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial K.$$

Dann haben f und $f + g$ gleich viele Nullstellen in K (entsprechend der Vielfachheiten gezählt).

- (b) Wieviele Nullstellen hat die Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = (z^6 - 4z^2 - 2z + 8) \sin(z)$$

jeweils auf der Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ und auf dem Kreisring $B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$?

Aufgabe 29: Argumentprinzip und nochmals Rouché

- (a) Zeigen Sie mithilfe des Argumentprinzips und Korollar 11.6 aus der Vorlesung, dass die Gleichung $e^z = z$ in $B_1(0)$ keine Lösung und in $B_2(0)$ zwei Lösungen hat.

Einen dafür relevanten Weg in der komplexen Ebene können Sie beispielsweise in WolframAlpha (<https://www.wolframalpha.com>) mit dem Befehl

```
parametric plot (Re(f),Im(f)) where f = exp(z) - z where z = e^(i t)
```

plotten.

- (b) Wie viele *verschiedene* Lösungen hat die Gleichung $\sin(z) = z$ in $B_2(1)$?
- (c) Wie viele *verschiedene* Lösungen besitzt die Gleichung $e^z = 3z^{100}$ innerhalb der Einheitskreisscheibe $B_1(0)$?
Hinweis: Aufgabe 28 (a).

Abgabe: Bis spätestens 18.00 Uhr am **Montag den 15.7.2019** im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.