Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
15. Juli 2019

Einführung Funktionentheorie

Übungsblatt 12

Aufgabe 30: Automorphismen der Kreisscheibe

Sei $\alpha \in \mathbb{E}$ und

$$\psi_\alpha : \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\overline{\alpha}} \right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\overline{\alpha}} \right\}, \quad z \mapsto \psi_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

Zeigen Sie, dass ψ_α eine konforme Abbildung ist mit $\psi_\alpha(0) = \alpha$, $\psi_\alpha(\alpha) = 0$, $\psi_\alpha^{-1} = \psi_\alpha$ und $\psi_\alpha(S^1) \subseteq S^1$, wobei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Warum folgt daraus schon, dass $\psi_\alpha|_{\mathbb{E}}$ ein Automorphismus der Kreisscheibe $\mathbb{E}$ ist?

Aufgabe 31: Automorphismen der Halbebene

Sei F die Cayley Transformation aus Aufgabe 5, Blatt 2, und $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$. Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad f := F^{-1} \circ g \circ F$$

eine Möbius Transformation ist, also von der Form

$$f_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

für ein

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie dann, dass die Abbildung

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H}), \quad M \mapsto f_M$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Ist sie auch ein Isomorphismus?

Hinweis: Verwenden Sie die explizite Form der Elemente aus $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ *aus Satz 12.11 aus der Vorlesung.*

Abgabe: Die Aufgaben müssen nicht mehr abgegeben werden und können in den Übungen auch nicht mehr besprochen werden. Falls Ihnen noch Aufgaben zur Klausurzulassung fehlen, können Sie allerdings durch Abgabe bis Dienstag den 23.7. um 10 Uhr fehlende Punkte aufholen.