Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
29. April 2019

Einführung Funktionentheorie

Übungsblatt 2

Aufgabe 6: Wegintegrale

Seien γ_1 und γ_2 Wege in $\mathbb{C}$ mit Anfangspunkt -1 und Endpunkt 1, wobei γ_1 entlang der reellen Achse und γ_2 entlang des oberen Einheitshalbkreises verlaufe.

Geben Sie jeweils eine explizite Parametrisierung von γ_1 und γ_2 an und berechnen Sie dann die vier Wegintegrale

$$\int_{\gamma_j} f_k(z)\,\mathrm{d}z\,, \qquad j,k \in \{1,2\}$$

für $f_1(z) = |z|^2$ und $f_2(z) = z^2$.

Aufgabe 7: Weglänge

Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass L invariant unter Reparametrisierungen ist, also für jede Reparametrisierung ϕ gilt, dass $L(\gamma \circ \phi) = L(\gamma)$.

Aufgabe 8: Partielle Integration

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und $\gamma : [a,b] \to U$ ein Integrationsweg in U mit Anfangspunkt $z_\mathrm{a} := \gamma(a)$ und Endpunkt $z_\mathrm{e} := \gamma(b)$. Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in H(U)$ die partielle Integrationsformel

$$\int_\gamma f'(z)g(z)\,\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_{z_\mathrm{a}}^{z_\mathrm{e}} - \int_\gamma f(z)g'(z)\,\mathrm{d}z$$

gilt. Wie sieht die Formel für geschlossene Wege aus?

Hinweis: Hier bezeichnet wie üblich $f(z)g(z)|_{z_\mathrm{a}}^{z_\mathrm{e}} := f(z_\mathrm{e})g(z_\mathrm{e}) - f(z_\mathrm{a})g(z_\mathrm{a})$. Falls Sie nicht sehen wie Sie ansetzen sollen, so ist ein Blick auf den Beweis der entsprechenden Formel in der Analysis 1 sicher hilfreich. Sie dürfen verwenden, dass die Ableitung einer holomorphen Funktion stetig ist.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Dienstag den 07.05.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.