Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
6. Mai 2019

Einführung Funktionentheorie

Übungsblatt 3

Aufgabe 9: Fresnel-Integrale

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ und $\gamma_R : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R(t) := R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, der Achtelkreis von R nach $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}R$ und $R \in (0, \infty)$. Zeigen Sie zunächst, dass

$$\lim_{R\to\infty} I(R) := \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Betrachten Sie nun das Wegintegral der auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion f entlang des geschlossenen Weges $[0, R] + \gamma_R + [\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}R, 0]$ um zu zeigen, dass die Fresnel-Integrale

$$S(R) := \int_0^R \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad C(R) := \int_0^R \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$$

beide den Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} S(R) = \lim_{R\to\infty} C(R) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

haben.

Hinweis: Es lässt sich $I(R)$ nicht in geschlossener Form angeben. Versuchen Sie also nicht, $I(R)$ explizit zu berechnen. Sie dürfen verwenden, dass das Gauß'sche Fehlerintegral den Wert

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

hat

Aufgabe 10: Komplexe Exponenten

Mit Hilfe des auf $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ definierten Hauptzweiges

$$\mathrm{Ln} : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \mathrm{Ln}(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$$

des Logarithmus definiert man den Hauptzweig der komplexen Potenzfunktion für komplexe Exponenten $\alpha \in \mathbb{C}$ durch

$$\mathbb{C}^- \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto z^\alpha := \exp(\alpha\,\mathrm{Ln}(z))\,.$$

Berechnen Sie mithilfe dieser Definition i^2, $\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}$, 1^{i} und i^{i}.

Zeigen Sie dann, dass sich $z \mapsto z^\alpha$ genau dann stetig auf $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fortsetzen lässt, wenn $\alpha \in \mathbb{Z}$ gilt.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Dienstag den 14.05.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.