Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
20. Mai 2019

Einführung Funktionentheorie

Übungsblatt 5

Aufgabe 13: Taylorreihen

Bestimmen Sie für die folgenden holomorphen Funktionen jeweils die Taylorreihe um den angegebenen Entwicklungspunkt z_0 und deren Konvergenzradius:

(a) $f : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \mathrm{Ln}(z) \quad \text{um } z_0 = 1\,,$

(b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \exp(-z^2) \quad \text{um } z_0 = 0\,,$

(c) $h : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad h(z) = \dfrac{z}{z-1} \quad \text{um } z_0 = \mathrm{i}\,.$

Hinweis: Bei (b) und (c) empfiehlt es sich, das Problem auf Taylorreihen zurückzuführen, die Sie bereits kennen. Den Konvergenzradius können Sie jeweils mithilfe von Satz 5.2 aus der Vorlesung ohne weitere Rechnungen erschließen.

Aufgabe 14: Fehlerabschätzung Taylorpolynom

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ habe den Konvergenzradius $R > 0$ und definiere auf $B_R(0)$ die holomorphe Funktion $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Zeigen Sie dass für $0 < r < R$ und $z \in B_r(0)$ mit $|z| = \rho$ gilt:

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{m} c_n z^n \right| \leq \frac{\|f\|_{\partial B_r(0)}}{1 - \frac{\rho}{r}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{m+1} .$$

Hier ist $\|f\|_{\partial B_r(0)} := \max_{\zeta \in \partial B_r(0)} |f(\zeta)|$.

Aufgabe 15: Nichtkonstante ganze Funktionen haben dichtes Bild

Sei $f \in H(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: Falls $f(\mathbb{C})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ liegt, so ist f konstant.

Wie sieht das Bild $p(\mathbb{C})$ eines nichtkonstanten Polynoms p und wie das Bild $\exp(\mathbb{C})$ der Exponentialfunktion aus?

Hinweis: Satz von Liouville.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Dienstag den 28.05.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.