Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
27. Mai 2019

Einführung Funktionentheorie

Übungsblatt 6

Aufgabe 16: Identitätssatz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet, also $U = \overline{U} := \{\overline{z} \,|\, z \in U\}$, welches auch ein nichtleeres reelles Intervall (a, b) enthalte, also $(a, b) \subset U$.

Sei weiterhin $f \in H(U)$ auf (a, b) reellwertig, also $f(z) \in \mathbb{R}$ für $z \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass dann notwendigerweise

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \qquad \text{für alle } z \in U$$

gilt. Insbesondere ist also f auf ganz $U \cap \mathbb{R}$ reellwertig.

Aufgabe 17: Borel Transformation und Resummierung

Es habe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ den Konvergenzradius $R > 0$.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass

$$\widetilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert und somit $\widetilde{f} \in H(\mathbb{C})$ gilt. Man nennt $\widetilde{f}$ die Borel-Transformierte von f.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $0 < r < R$ gilt, dass

$$|\widetilde{f}(z)| \leq \|f\|_{\partial B_r(0)} \cdot \mathrm{e}^{\frac{|z|}{r}} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(c) Man defniert nun den Borel-Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ durch

$$\mathcal{B}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) := \int_0^{\infty} \widetilde{f}(tz)\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ für die das Integral als uneigentliches Riemann-Integral existiert. Man kann zeigen, dass im Konvergenzgebiet $B_R(0)$ der Reihe der Borel-Wert mit dem Wert der Reihe übereinstimmt und außerhalb eine holomorphe Fortsetzung von f liefert. Man spricht dann auch von der Borel-Resummierung der Reihe.

Bestimmen Sie $\mathcal{B}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$, also den Borel-Wert der geometrischen Reihe. Welchen Borel-Wert haben demnach die Reihen

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots \qquad \text{und} \qquad 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 - \ldots \quad ?$$

Abgabe: Bis spätestens 18.00 Uhr am **Montag den 03.06.2019** im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.