Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
3. Juni 2019

Einführung Funktionentheorie

Übungsblatt 7

Aufgabe 18: Minimumsprinzip

Formulieren Sie ein *Minimumsprinzip* für holomorphe Funktionen $f \in H(U)$, indem Sie das Maximumsprinzip (Korollar 6.4 aus der Vorlesung) in geeigneter Weise auf die Funktion $1/f$ anwenden.

Aufgabe 19: Sattelpunkte von $|f|$

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(U)$ nicht konstant und $z_0 \in U$ mit $f'(z_0) = 0$ und $f(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass z_0 ein Sattelpunkt der in einer Umgebung von z_0 reell differenzierbaren Funktion $|f|$ ist, also $D|f|\,|_{z_0} = 0$, aber z_0 ist weder Maximum noch Minimum von $|f|$.

Aufgabe 20: Hebbare Singularität

Zeigen Sie, dass sich die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto f(z) = \frac{\sin(2z)}{\sin(z)}$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Welche Werte nimmt f dann an den Stellen $\pi\mathbb{Z}$ an?

Aufgabe 21: Zyklen

Zeichnen Sie jeweils einen Zyklus Γ in $\mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Weder $\mathrm{Int}(\Gamma)$ noch $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ sind Gebiete.

(b) Es gilt $\mathrm{ind}_\Gamma(z) \in \{0, 1\}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ und der Punkt 0 liegt in einer beschränkten Komponente von $\mathrm{Ext}(\Gamma)$.

(c) Wie (a), wobei zusätzlich Γ nur aus einem einzigen geschlossenen Weg bestehen darf.

(d) Es gilt $\mathrm{ind}_\Gamma(z) \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ und die Mengen $U_j := \{\mathrm{ind}_\Gamma(z) = j\}$ sind für $j = 0, \ldots, n$ jeweils Gebiete.

(e) Wie (d) für $n = 3$, wobei zusätzlich Γ nur aus einem einzigen geschlossenen Weg bestehen darf.

Abgabe: Bis spätestens 18.00 Uhr am **Montag den 17.06.2019** im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.