

EINFÜHRUNG FUNKTIONENTHEORIE

Übungsblatt 9

Aufgabe 24: Regeln zur Berechnung von Residuen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $z_0 \in U$ und $f, g \in H(U \setminus \{z_0\})$. Zeigen Sie die folgenden Regeln zur Bestimmung von Residuen:

(a) Falls der Grenzwert existiert, so gilt $\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$.

Dann ist die Singularität bei z_0 entweder hebbar und $\operatorname{Res}_f(z_0) = 0$ oder ein Pol erster Ordnung.

(b) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Res}_{z_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{Res}_{z_0}(f) + \beta \operatorname{Res}_{z_0}(g)$.

(c) Hat f an der Stelle z_0 einen Pol erster Ordnung und ist $g \in H(U)$, so gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0)\operatorname{Res}_{z_0}(f).$$

(d) Ist $f \in H(U)$ und hat f bei z_0 eine einfache Nullstelle, so ist

$$\operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Tipp: Verwenden Sie (a).

(e) Hat f an der Stelle z_0 einen Pol k -ter Ordnung, so ist

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \left. \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \right|_{z=z_0} \frac{(z - z_0)^k f(z)}{(k-1)!}.$$

Aufgabe 25: Pole finden und Residuen berechnen

Finden Sie die Pole der folgenden Funktionen, bestimmen Sie deren Ordnung und berechnen Sie jeweils das Residuum.

(a) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$

(b) $g(z) = \frac{1}{1 - z^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$

(c) $h(z) = \frac{z^m}{(1 - z)^n}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$

Abgabe: Bis spätestens 18.00 Uhr am **Montag den 1.7.2019** im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.