S. Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019

Einführung in die Funktionentheorie

Übungsaufgaben zur Klausur

Die folgenden Übungsaufgaben können **zusätzlich** zu den wöchentlichen Hausaufgaben und zum Vorlesungsskript zur Vorbereitung auf die Klausur dienen. Während in der Klausur ähnliche Aufgabentypen abgefragt werden, ist es **nicht** ausreichend, lediglich die hier gestellten Beispiele durchzuarbeiten.

Aufgabe 1: Grundlegendes Verständnis

Kreuzen Sie $\boxed{\text{W}}$ an, wenn die Aussage unter den gegebenen Bedingungen wahr ist und $\boxed{\text{F}}$, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt einen Punkt, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt eine Punkt Abzug. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. **Achtung:** Wenn nicht eindeutig erkennbar ist, ob bzw. welche Antwort angekreuzt wurde, wird die jeweilige Aufgabe mit -1 Punkt bewertet.

Es bezeichne Ln: $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ den Hauptzweig des Logarithmus.

- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Ln kann holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ fortgesetzt werden.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Ln hat eine Stammfunktion.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Funktion $\exp \circ \operatorname{Ln}$ kann auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortgesetzt werden.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Ableitung Ln' lässt sich zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortsetzen.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann folgt daraus:

- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ f ist lokal integrierbar.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ f hat eine Stammfunktion.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ f'' hat eine Stammfunktion.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Taylorreihe von f bei z_0 konvergiert gegen f auf ganz U.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Taylorreihe von f bei z_0 konvergiert auf ganz U, aber nicht notwendigerweise überall gegen f.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Taylorreihe von f bei z_0 divergiert für alle $z \notin U$.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Taylorreihe von f bei z_0 hat die Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit Koeffizienten $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Ist $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$, so ist f konstant.

Für $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t}$ und $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) := 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi t}$ gilt:

- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Der Zyklus $\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ ist nullhomolog in $\mathbb{C}$.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z = 4\pi\mathrm{i}$.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Der Zyklus $\tilde{\Gamma} := 2\gamma_1 + \gamma_2$ ist nullhomolog in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\operatorname{ind}_{\gamma_2}(0) = 4$.

Aufgabe 2: Formulieren Sie die homologe Version des Cauchy'schen Integralsatzes.

Bemerkung: *Wenn Sie eine Aussage oder eine Definition "formulieren" sollen, dann kommt es auf eine korrekte, präzise und vollständige Formulierung an. Es ist aber unerheblich, ob die Formulierung wörtlich dieselbe wie im Skript ist.*

Korrekte Lösungen dieser Aufgabe wären beispielsweise:

"Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich. Ein Zyklus Γ in U ist genau dann nullhomolog in U, wenn für jede auf U holomorphe Funktion f gilt: $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$."

"Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und Γ ein Zyklus in U. Dann gilt:
Γ ist nullhomolog in $U \;\Leftrightarrow\; \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für alle $f \in H(U)$."

Auch korrekt wäre es, anders als in der Vorlesung nur die eine Richtung der Äquivalenz anzugeben (die in der Literatur meist als Cauchy Integralsatz bezeichnet wird.):

"Sei $f \in H(U)$ und Γ ein Zyklus in U der in U nullhomolog ist. Dann folgt $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$."

Eine **unvollständige Lösung** wäre beispielsweise:

"Γ nullhomolog $\Leftrightarrow \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$."

Eine **falsche Lösung** wäre beispielsweise:

"Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und Γ ein Zyklus in U. Dann gilt $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für alle $f \in H(U)$."

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Koeffizienten c_n der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ der Funktion

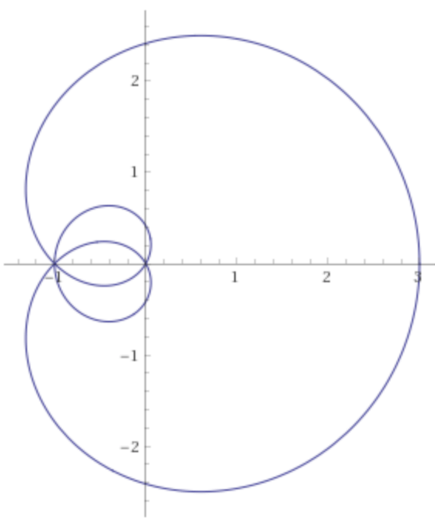
$$g(z) = \mathrm{Ln}(2-z)$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und geben Sie den Konvergenzradius der Reihe an.

Bemerkung: *"Bestimmen" meint, dass Ihr Lösungsweg einschließlich aller Rechnungen und Argumente nachvollziehbar sein muss, allerdings kein formaler Beweis gefragt ist.*

Wenn Sie etwas "angeben" sollen, zählt nur das richtige Ergebnis; ein Lösungsweg oder eine Begründung sind dann nicht gefragt.

Aufgabe 4: Unten sehen Sie einen Plot des Weges $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t) = \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t})$. Tragen Sie in die Zeichnung den korrekten Umlaufsinn sowie für jede Zusammenhangskomponente von $\mathrm{Int}(\gamma)$ jeweils den Wert von ind_γ ein.



Aufgabe 5: Bestimmen Sie mit Hilfe des Residuenkalküls das Integral

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$$

entlang des geschlossenen Weges γ, der die Punkte 1, -1, $-1+2\mathrm{i}$, $1+2\mathrm{i}$, 1 in der angegebenen Reihenfolge durch gerade Strecken verbindet. Skizzieren Sie dazu zunächst den Weg γ und die Lage der Pole des Integranden.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie mit Hilfe des Residuenkalküls den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbb{Z}$ das Residuum der Funktion f_k an der Stelle 0, wobei

$$f_k : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z^k}\,.$$

Geben Sie jeweils auch die genaue Art der Singularität bei 0 an.

Aufgabe 8: Geben Sie jeweils den größten Bereich in $\mathbb{C}$ an, auf den die Funktion

$$g : z \mapsto \frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^2}$$

holomorph fortgesetzt werden kann bzw. auf dem sie meromorph ist. Bestimmen Sie dann für jeden Pol z_0 der holomorphen Fortsetzung die Laurentreihenentwicklung von g bei z_0 und geben Sie das Konvergenzgebiet dieser Laurentreihe jeweils explizit an.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^5 + 5z^4 + z^3 + z^2 + 10z + 1$$

im Kreisring $1 < |z| < 2$.

Aufgabe 10: Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen. Formulieren Sie dazu formal korrekte und vollständige Argumente. Sie dürfen Sätze aus der Vorlesung verwenden, sollten diese dann aber explizit benennen.

a) Jede nichtkonstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat auf der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ höchstens endlich viele Nullstellen.

b) Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\overline{B_1(0)}$ ist konstant.

c) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ so, dass $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

Bemerkung: *Wenn ein formaler Beweis gefragt ist, müssen sowohl die Gesamtstruktur als auch die einzelnen Schritte klar nachvollziehbar und korrekt sein. Sie dürfen dabei (falls nicht anders angegeben) die in der Vorlesung bewiesenen Aussagen verwenden.*