Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
15. April 2019

Mathematik für Physiker 2 / Lineare Algebra 1

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Konsequenzen der Vektorraumaxiome

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie jeweils unter Verwendung der Vektorraumaxiome und der Propositionen 1.8, 1.9 und 1.10 aus der Vorlesung, dass

(a) $0 \cdot v = \mathbf{0}$ für alle $v \in V$

(b) $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$

(c) $(-1) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$

(d) $\lambda \cdot v = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ oder $v = \mathbf{0}$

Aufgabe 2: Funktionenräume

Sei X eine Menge und $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Menge

$$V^X := \{f : X \to V\}$$

aller Abbildungen von X nach V mit der Addition

$$\boldsymbol{+} : V^X \times V^X \to V^X\,, \quad (f, g) \mapsto f \boldsymbol{+} g \quad \text{mit} \quad (f \boldsymbol{+} g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{für alle } x \in X$$

und der skalaren Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V^X \to V^X$

$$\bullet : \mathbb{K} \times V^X \to V^X\,, \quad (\lambda, f) \mapsto \lambda \bullet f \quad \text{mit} \quad (\lambda \bullet f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \text{für alle } x \in X$$

einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V^X, \boldsymbol{+}, \bullet)$ definiert.

Bemerkung: Wir haben hier die Addition und die skalare Multiplikation in dem Vektorraum V^X der Übersichtlichkeit halber mit fetten Symbolen bezeichnet. Sie sollten diese Notation zwar auch in Ihrer Lösung verwenden, üblicherweise macht man diese Unterscheidung aber nicht.

Aufgabe 3: Durchschnitte von Unterräumen

Zeigen Sie, dass der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume eines Vektorraums V wieder ein Unterraum ist. Wann ist die Vereinigung zweier Unterräume wieder ein Unterraum?

Aufgabe 4: Funktionenräume?

Die Menge $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gemäß Aufgabe 2 ein reeller Vektorraum. Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Mengen Unterräume des $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ sind:

(a) die Menge aller ungeraden Funktionen $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$,

(b) die trigonometrischen Polynome, dies sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich in der Form
$$f(x) = \tfrac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx))$$
mit $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ darstellen lassen,

(c) die Menge der stetigen Funktionen mit $f(0) = 1$,

(d) die Menge der differenzierbaren Funktion mit $f(0) = \lambda \cdot f'(0)$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$,

(e) die Menge der differenzierbaren Funktionen mit $f(0) \cdot f'(0) = 0$.

Abgabe: Bis spätestens 8.00 Uhr am Freitag den 26.04.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.

Bitte Rückseite beachten!

Zum Ablauf der Übungen:

Jeweils freitags wird in der Vorlesung ein neues Übungsblatt mit Aufgaben zum Stoff der Vorlesung verteilt. Die intensive Beschäftigung mit diesen Aufgaben und die schriftliche Ausarbeitung der Lösungen sind unabdingbar für ein wirkliches Verständnis des Stoffs der Vorlesung. Jeder Teilnehmer muss seine schriftliche Ausarbeitung der Aufgaben spätestens am darauffolgenden Freitag vor Beginn der Vorlesung in den dafür vorgesehenen Briefkästen im 3. Stock des C-Baus abgeben.

Die Aufgaben werden von den Übungsgruppenleitern korrigiert und danach in den Übungsgruppen besprochen. Zu einem Teil der Aufgaben werden die Lösungen dabei von Studierenden präsentiert. Die Übungsgruppenleiter teilen Ihnen spätestens eine Woche zuvor mit, ob und welche Aufgabe Sie vorrechnen müssen. Während der Vorbereitungswoche können Sie sich natürlich Hilfe und Feedback von Ihrem Übungsgruppenleiter holen. Das Vorrechnen einer Aufgabe kann nur in gut begründeten Ausnahmefällen abgelehnt oder verschoben werden. Denken Sie beim Vorrechnen daran, dass Sie nicht nur den Übungsgruppenleiter überzeugen müssen, dass Sie die Aufgabe verstanden und richtig gelöst haben, sondern in erster Linie Ihren Kommilitonen die Lösung der Aufgabe erklären sollen. Daher sollten Sie Ihren Vortrag sehr gut vorbereiten und durchdenken.

Ist Ihre Präsentation unverständlich oder falsch, so werden Sie automatisch in der nächsten Woche wieder zum Vorrechnen eingeteilt. Nach zweimaligem ungenügenden Vorrechnen einer Aufgabe entfällt die Berechtigung zur Klausurteilnahme, ebenso wie bei unentschuldigtem Fehlen in einer Übungsstunde, in der man vorrechnen sollte.

Voraussetzungen für die Zulassung zur Klausur sind:

(1) Die sinnvolle Bearbeitung und schriftliche Abgabe von mindestens 50% der Übungsaufgaben zu den jeweils auf den Blättern genannten Terminen.

(2) Die korrekte und sinnvolle Präsentation der zugewiesenen Aufgaben in den Übungsgruppen.